МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Югорский государственный университет»
НИЖНЕВАРТОВСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Югорский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических занятий
для студентов 2 курса очной формы обучения
образовательных учреждений
среднего профессионального образования
специальностей
21.02.02 Бурение нефтяных и газовых скважин
21.02.01 Разработка и эксплуатация
нефтяных и газовых месторождений

Часть II

Нижневартовск 2015

ББК 22.1
М-34

РАССМОТРЕНО	**УТВЕРЖДАЮ**
На заседании кафедры Е и ЭД	Председатель методического совета
Протокол № 04 от 21.04.2015г.	ННТ (филиал) ФГБОУ ВПО «ЮГУ»
Зав. кафедрой	____________Р.И. Хайбулина
____________Л.В. Рвачева	« 28 » мая 2015г.

Соответствует:

1. Федеральному государственному образовательному стандарту специальностей 21.02.02 Бурение нефтяных и газовых скважин, утв. 12.05.2014 г. № 483; 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, утв. 12.05.2014 г. № 482.
2. Рабочей программе учебной дисциплины «Математика» (ЕН. 01) специальностей 21.02.02 Бурение нефтяных и газовых скважин, 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, утв. 07.09.2011г. №1 заседания ПЦК «МОЕНД».

Разработчик:

Карсакова Елена Николаевна, преподаватель высшей квалификационной категории Нижневартовского нефтяного техникума (филиала) ФГБОУ ВПО «ЮГУ».

Рецензенты:

1. Суханова Т.Г., преподаватель высшей квалификационной категории Нижневартовский нефтяной техникум (филиала) ФГБОУ ВПО «ЮГУ».
2. Самарина Е.Ф., кандидат педагогических наук, доцент ТюмГНГУ.

Замечания, предложения и пожелания направлять в Нижневартовский нефтяной техникум (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Югорский государственный университет» по адресу: 628615, Тюменская обл., Ханты-Мансийский автономный округ, г. Нижневартовск, ул. Мира, 37.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению практических занятий разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом по специальности среднего профессионального образования 21.02.02 Бурение нефтяных и газовых скважин, 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений и рабочей программой учебной дисциплины «Математика», предназначенной для реализации государственных требований к уровню подготовки выпускников.

Комплекс практических занятий является вспомогательным инструментом при формировании общей системы знаний на основе использования математических идей и методов в профессиональной деятельности; практического применения приобретенных знаний и умений при выполнении исследовательских и практических работ.

Практические занятия учебной дисциплины «Математика» ориентированы на развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, необходимой для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла.

Пособие содержит требования к выполнению и оформлению практических занятий, тематический перечень работ, методические указания к выполнению практической части, варианты заданий, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Все работы выполняются в тетради для практических занятий.
2. Работы оформляют чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, внимательно изучите методические указания к работе.
5. Уделите внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение сопроводите краткими пояснениями, указав используемые формулы.
7. Геометрические построения следует выполнять карандашом с помощью чертёжных инструментов.
8. Задания к практическим занятиям имеют 15 вариантов.
9. Каждый студент выполняет свой индивидуальный вариант.

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Номер раздела	**Номер и тема занятия**	**Количество аудиторных часов**
1	**2**	**3**
1	Практическое занятие № 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.	2
1	Практическое занятие № 2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.	2
1	Практическое занятие № 3. Действия над комплексными числами в показательной форме.	2
2	Практическое занятие № 4. Вычисление определителей второго порядка.	2
2	Практическое занятие № 5. Вычисление определителей третьего порядка.	2
2	Практическое занятие № 6. Решение системы 3 линейных уравнений с 3 переменными.	2
3	Практическое занятие № 7. Вычисление пределов функции в заданной точке.	2
3	Практическое занятие № 8. Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел.	2
3	Практическое занятие № 9. Первый и второй замечательные пределы.	2
4	Практическое занятие № 10. Правила дифференцирования функций.	2
4	Практическое занятие № 11. Производные тригонометрических функций.	2
4	Практическое занятие № 12. Производные логарифмических и показательных функций.	2
4	Практическое занятие № 13. Исследование функции и построение графика.	2
5	Практическое занятие № 14. Неопределённый интеграл и его свойства.	2
5	Практическое занятие № 15. Приложения неопределённого интеграла к решению задач.	2
5	Практическое занятие № 16. Определённый интеграл и его свойства.	2
5	Практическое занятие № 17. Приложения определённого интеграла к решению задач.	2
5	Практическое занятие № 18. Приближённые вычисления определённого интеграла.	2
6	Практическое занятие № 19. Отношения множеств.	2
6	Практическое занятие № 20. Операции над множествами.	2
6	Практическое занятие № 21. Элементы комбинаторики.	2
7	Практическое занятие № 22. Элементы теории вероятностей.	2
7	Практическое занятие № 23. Расчет числовых характеристик случайной величины.	2
	ИТОГО:	**46**

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Цель:

- сформировать навыки нахождения производных логарифмических и показательных функций;
- развить умение вычисления значения производной при заданном значении аргумента;
- закрепить знания о способах дифференцирования сложной функции;

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Правила дифференцирования», «Свойства логарифмов», таблица значений тригонометрических функций.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Производные логарифмических и показательных функций находят по правилам:

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (e^u)' = e^u \cdot u'$;

$(\lg u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln 10}$; $\quad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$. $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$;

Пример 1. Найти производную функции $y(x) = \ln tg 2x$ и вычислить значение $y'(\pi/8)$.

Решение. Используем формулу $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, подставим в неё *tg2x* вместо *u*.

Получаем, *y´(x)*= $(\ln \mathrm{tg}\, 2x)' = \frac{(tg\, 2x)'}{tg\, 2x} = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x \cdot tg\, 2x} = \frac{2}{\cos 2x \cdot \sin 2x}$.

Найдём значение производной в точке $x = \pi/8$:

$$y'(\frac{\pi}{8}) = \frac{2}{\cos 2\frac{\pi}{8} \cdot \sin 2\frac{\pi}{8}} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4.$$

Пример 2. Найти производную функции $y(x) = 5^{\cos 3x}$ и вычислить значение $y'(\Pi/6)$.

Решение. Используем формулу $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ и подставим в неё *cos3x* вместо *u* при условии *a=5*.

Получаем, $y'(x)=(5^{\cos 3x})'=$

$= 5^{\cos 3x}\ln 5\cdot(\cos 3x)'=5^{\cos 3x}\cdot\ln 5\cdot(-3\sin 3x)=-3\sin 3x\cdot 5^{\cos 3x}\cdot\ln 5;$

Найдём значение производной в точке $x = \pi/6$:

$$y'(\frac{\pi}{6})=-3\sin 3\frac{\pi}{6}\cdot 5^{\cos 3\frac{\pi}{6}}\cdot\ln 5=-3\sin\frac{\pi}{2}\cdot 5^{\cos\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 5=-3\cdot 5^0\cdot\ln 5=-3\ln 5;$$

Пример 3. Найти производную функции $y(x)=6\lg(4x+4)$ и вычислить значение $y'(2)$.

Решение. Используем формулу $(\lg u)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln 10};$ и подставим в неё *4x+4* вместо *u*.

Получаем, *y´(x)*= $(6\lg(4x+4))'=6\dfrac{(4x+4)'}{(4x+4)\cdot\ln 10}=\dfrac{24}{(4x+4)\cdot\ln 10};$

Найдём значение производной в точке $x = 2$:

y´(2)= $\dfrac{24}{(4\cdot 2+4)\cdot\ln 10}=\dfrac{2}{\ln 10};$

Пример 4. Найти производную функции $y(x)=5e^{\cos 3x}$ и вычислить значение $y'(\pi/2)$.

Решение. Используем формулу $(e^u)'=e^u\cdot u'$ и подставим в неё *cos3x* вместо *u*.

Получаем,

y´(x) = $(5e^{\cos 3x})'=5\cdot e^{\cos 3x}(\cos 3x)'=5\cdot e^{\cos 3x}(-3\sin 3x)=-15\sin 3x\cdot e^{\cos 3x};$

Найдём значение производной в точке $x = \pi/2$:

y´(π/2)= $-15\sin 3\dfrac{\pi}{2}\cdot e^{\cos 3\frac{\pi}{2}}=-15\cdot(-1)e^0=15;$

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти производные функций при данном значении аргумента.

Вариант 1.

1. $y(x)=\ln tgx;\quad y'(\pi/4).$
2. $y(x)=4^{\sin 4x};\quad y'(0).$
3. $y(x)=\lg(10x-2);\quad y'(3)$.
4. $y(x)=9e^{-x}\cdot 2^{\sin 4x};\quad y'(0)$.

Вариант 2.

1. $y(x)=5e^{3\sin 3x};\quad y'(0).$
2. $y(x)=10^{\sin 5x};\quad y'(0).$
3. $y(x)=4\lg(2x+3);\quad y'(4)$
4. $y(x)=\ln\cos^3 x;\quad y'(-\pi/3).$

Вариант 3.

1. $y(x)=\ln tg4x;\quad y'(\pi/16).$
2. $y(x)=15^{\sin 4x};\quad y'(0).$
3. $y(x)=2\lg(20x+3);\quad y'(5)$
4. $y(x)=2e^{\sin 2x}\cdot 3^{x^2-2};\quad y'(0).$

Вариант 4.

1. $y(x) = 3^{\cos 4x}$; $y'(\pi/8)$.
2. $y(x) = 15e^{\cos 3x}$; $y'(\pi/2)$.
3. $y(x) = 4\lg(15x - 3)$; $y'(2)$
4. $y(x) = \ln ctgx$; $y'(-\pi/4)$.

Вариант 5.

1. $y(x) = 3\lg(5x - 1)$; $y'(5)$
2. $y(x) = 7^{\sin 7x}$; $y'(0)$.
3. $y(x) = \ln tg5x$; $y'(\pi/20)$.
4. $y(x) = e^{2x} \cdot 5^{x^2+2x}$; $y'(1)$.

Вариант 6.

1. $y(x) = 4^{\cos 3x}$; $y'(\pi/2)$.
2. $y(x) = 3e^{\cos 3x}$; $y'(\pi/2)$.
3. $y(x) = 5\lg(8x + 4)$; $y'(3)$
4. $y(x) = \ln\sin^2 4x$; $y'(\Pi/16)$.

Вариант 7.

1. $y(x) = 5^{\cos 2x}$; $y'(\pi/4)$.
2. $y(x) = \ln\cos^3 x$; $y'(-\Pi/3)$.
3. $y(x) = 2\lg(2x + 5)$; $y'(4)$
4. $y(x) = e^{\cos 2x} \cdot 2^{\sqrt{x}}$; $y'(1)$.

Вариант 8.

1. $y(x) = 2^{\cos 5x}$; $y'(\pi/10)$.
2. $y(x) = 3e^{\sin 2x}$; $y'(0)$.
3. $y(x) = 4\lg(12x - 6)$; $y'(2)$
4. $y(x) = \ln tg3x$; $y'(\pi/12)$.

Вариант 9.

1. $y(x) = 3^{\cos 7x}$; $y'(\pi/14)$.
2. $y(x) = 5^{\sin 2x}$; $y'(0)$.
3. $y(x) = 3\lg(4x + 1)$; $y'(6)$
4. $y(x) = \ln 5^{x^2} \cdot e^{2x}$; $y'(1)$.

Вариант 10.

1. $y(x) = 7^{\cos 3x}$; $y'(\pi/2)$.
2. $y(x) = 8e^{2x^2}$; $y'(0)$.
3. $y(x) = 2\lg(8x - 4)$; $y'(3)$
4. $y(x) = \ln\arccos 4x$; $y'(0)$.

Вариант 11.

1. $y(x) = 4\lg(2x - 3)$; $y'(5)$
2. $y(x) = \ln\sin^2 4x$; $y'(\Pi/16)$.
3. $y(x) = 15^{\sin 4x}$; $y'(0)$.
4. $y(x) = e^{x} \cdot 14^{x^2+3x+5}$; $y'(1)$.

Вариант 12.

1. $y(x) = 10^{3\sin 3x}$; $y'(0)$.
2. $y(x) = 5e^{4x^3}$; $y'(0)$.
3. $y(x) = 7\lg(3x + 5)$; $y'(4)$
4. $y(x) = \ln tg2x$; $y'(\pi/8)$.

Вариант 13.

1. $y(x) = 5\lg(7x - 4)$; $y'(2)$
2. $y(x) = \ln tg3x$; $y'(\pi/12)$.
3. $y(x) = 12^{2\sin 2x}$; $y'(0)$.
4. $y(x) = 9e^{-x} \cdot 2^{\sin 4x}$; $y'(0)$.

Вариант 14.

1. $y(x) = 5^{3\sin 4x}$; $y'(0)$.
2. $y(x) = 3e^{\sin 2x}$; $y'(0)$.

3. $y(x) = 3\lg(4x+5);\quad y'(2)$ 4. $y(x) = \ln ctg^2 2x;\quad y'(\pi/8).$

Вариант 15.

1. $y(x) = 6\lg(3x+1);\quad y'(5)$ 2. $y(x) = \ln\arcsin 4x;\quad y'(0).$

3. $y(x) = 4^{5\sin 3x};\quad y'(0).$ 4. $y(x) = 3e^{3x}\cdot 7^{2x-1};\quad y'(1).$

Вопросы для самоконтроля:

1. Чему равна производная натурального логарифма?
2. Запишите формулу производной десятичного логарифма.
3. Чему равна производная экспоненциальной функции?
4. Как найти производную показательной функции с основанием *a*?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Цель:

- сформировать навыки исследования функций по первой и второй производной;

- развить способность применения результатов исследования к построению графика функции;

- закрепить знания о наибольшем и наименьшем значениях функции.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Правила дифференцирования».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

1. Исследование функции на монотонность и экстремум.

Возрастающие и убывающие функции называют *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает,- *промежутками монотонности*. Возрастание и убывание функции *y = f(x)* характеризуется знаком её первой производной:

- если в некотором промежутке первая производная *f ´(x)>0, то функция возрастает в этом промежутке;*

- если в некотором промежутке первая производная *f ´(x)<0, то функция убывает в этом промежутке.*

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* функции. Ими являются только критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или терпит разрыв. Если при переходе через критическую точку x_0 производная *f ´(x)* меняет знак, то функция *y = f(x)* имеет в точке x_0

экстремум:

~ максимум (max), если производная y' меняет знак с “+” на “-“;

~ минимум (min), если производная y' меняет знак с “-“ на “+”;

~ если знак y' не меняется, то функция не имеет экстремума в данной точке.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум:

1. Найти производную функции y'.
2. Приравнять y' к нулю, решить уравнение, найти критические точки.
3. Исключить критические точки из области определения $D(x)$, указать интервалы знакопостоянства y'.
4. На каждом интервале определить знак производной y'.
5. По знаку производной y' установить монотонность функции на интервалах:

   при $y' \geq 0$ функция *y = f(x)* возрастает ↑, при $y' \leq 0$ функция убывает ↓.
6. Найти экстремумы функций, исследуя знак производной y' в окрестности каждой критической точки.
7. Вычислить значения экстремумов в критических точках.
8. Результаты исследования занести в таблицу.
9. Построить схематический график данной функции.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}$ на монотонность и экстремум.

Решение:

1) $y' = (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3})' = x^2 + 4x;$

2) $x^2+4x=0$; $x(x+4)=0$; $x_1=0$ или $x_2=-4$

3) $(-\infty;-4) \cup (-4;0) \cup (0;+\infty)$

4) $y'(-5) = (-5)^2 + 4(-5) = 25 - 20 = 5\,(+)$;

$y'(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3\,(-)$;

$y'(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 = 1 + 4 = 5\,(+)$

+ ○ - ○ + ○ → f ’(x)

-4 0

5) $x \in (-\infty;-4) \cup (0;+\infty)\ (\uparrow)$, $x \in (-4;0)\ (\downarrow)$

6) max min

+ ○ - ○ + ○ → f ’(x)

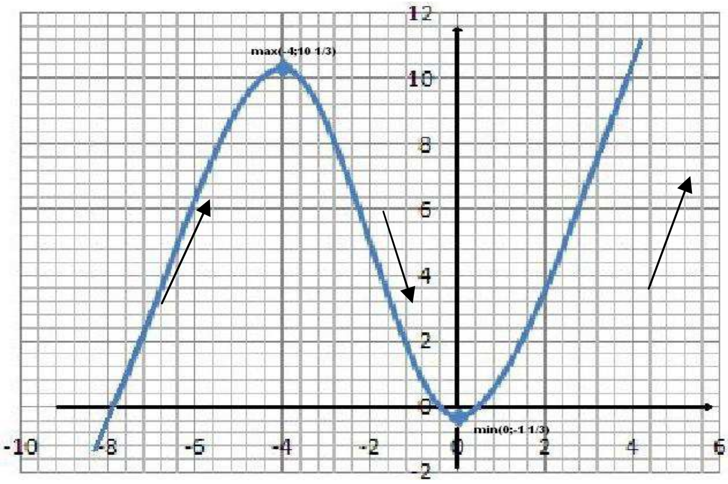
-4 0

7) $y_{max} = y(-4) = \frac{1}{3}\cdot(-4)^3 + 2(-4)^2 - \frac{1}{3} = 10\frac{1}{3}$; $\quad y_{\min} = y(0) = -\frac{1}{3}$.

8) Результаты исследования:

x	$(-\infty;-4)$	-4	(-4;0)	0	$(0;+\infty)$
y'	+	**0**	-	**0**	+
y	↑	max $10\frac{1}{3}$	↓	min $-\frac{1}{3}$	↓

9) График функции $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}$ изображён на рис.1



2. Исследование графика функции на выпуклость и точку перегиба.

Промежутки, в которых график функции обращён выпуклостью вверх или вниз, называются *промежутками выпуклости графика функции*. Выпуклость графика функции *y = f(x)* характеризуется знаком её второй производной:

- если в некотором промежутке вторая производная *f ´´(x)>0, то график функции выпуклый вниз в этом промежутке;*

- если в некотором промежутке вторая производная *f ´´(x)<0, то график функции выпуклый вверх в этом промежутке.*

Точка графика функции *y = f(x)*, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений, называется *точкой перегиба*. Точками перегиба могут служить только критические точки, в которых вторая производная *f ´´(x)* равна нулю или терпит разрыв. Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная *f ´´(x)* меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0;y_0)$.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точку перегиба:

1. Найти вторую производную функции *y´´*.
2. Приравнять *y´´* к нулю, решить уравнение, найти критические точки.
3. Исключить критические точки из области определения $D(x)$, указать интервалы знакопостоянства *y´´*.
4. На каждом интервале определить знак второй производной *y´´*.

5. По знаку производной y'' установить направление выпуклости графика функции: при $y''>0$ график выпуклый вниз $\cup$, при $y''<0$ график выпуклый вверх $\cap$.

6. Найти точку перегиба, если она существует.

7. Результаты исследования занести в таблицу.

8. Построить схематический график данной функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ на выпуклость и точку перегиба.

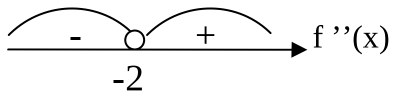
Решение:

1) $y'=(\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3})'=x^2+4x;$ $y''=(x^2+4x)'=2x+4;$

2) $2x+4=0;\ x=-2$ – крит. точка

3) $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

4) $y''(-5)=-5\cdot 2+4=-10+4=-6\,(-)$;
$y''(1)=1\cdot 2+4=2+4=6\,(+)$



5) $x\in(-\infty;-2)$ график выпуклый *вверх* $\cap$; $x\in(-4;0)$ график выпуклый вниз $\cup$.

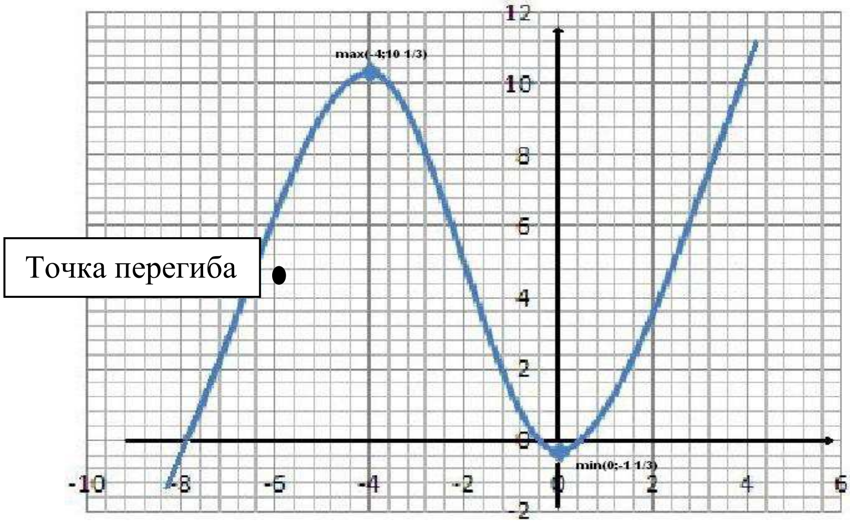
6) Точка перегиба существует при $x=-2$. Найдём ординату этой точки: y(-2)= 5.

Итак, (-2;5) – точка перегиба.

7) Результаты исследования:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;+\infty)$
y''	-	**0**	+
y	$\cap$	5	$\cup$

8) График функции $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ изображён на рис.2



3. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции *y* = *f(x)*, непрерывной на некотором промежутке [a;b], необходимо:

1. Найти производную функции y'.
2. Найти критические точки – точки, в которых $y' = 0$.
3. Отобрать критические точки, лежащие внутри промежутка [a;b].
4. Вычислить значения функций в выбранных точках и на концах промежутка [a;b].
5. Из полученных значений определить наибольшее и наименьшее значения: max f(x) и min f(x).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке [-1;3].

Решение:

1. $y' = (x^3 - 9x^2 + 24x - 1)' = 3x^2 - 18x + 24.$

2. $3x^2 - 18x + 24 = 0,\ x^2 - 6x + 8 = 0,\ D = 4, x_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = 2; 4$.

3. Из найденных критических точек внутри отрезка [-1;3] лежит только x = 2.

4. Найдём значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ в точке x=2 и на концах отрезка [-1;3]: y(-1) = -35, y(2) = 19, y(3) = 17.

5. Очевидно, что $y_{max}(2) = 19$, $y_{min}(-1) = -35$.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
2. Исследовать функцию на выпуклость и точку перегиба.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

Вариант 1.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ 2. $y = x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ 3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35, \quad [-4; 4]$.

Вариант 2.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{4}{3}$ 2. $y = -x^3 + 6x^2 + 24x - 5$ 3. $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10,\ [0;3]$.

Вариант 3.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$ 2. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ 3. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3},\ [-2; 2]$.

Вариант 4.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 4$ 2. $y = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 10$ 3. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4,\ [-4; 2]$.

Вариант 5.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6$ 2. $y = x^3 + 3x^2 + 24x - 8$ 3. $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1,\ [-1; 2]$.

Вариант 6.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$ 2. $y=x^3+3x^2+4$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [0;4]$

Вариант 7.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}$ 2. $y=x^3-6x^2+9x-3$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [1;6]$

Вариант 8.

1. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-1$ 2. $y=x^3+6x^2+4$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [-2;2]$

Вариант 9.

1. $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4$ 2. $y=x^3-6x^2+6x-2$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [-2;3]$

Вариант 10.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2$ 2. $y=2x^3-9x^2+12x-8$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [-2;4]$

Вариант 11.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$ 2. $y=2x^3-3x^2-12x+8$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [-1;7]$

Вариант 12.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$ 2. $y=2x^3+9x^2+12x-2$ 3. $y=-x^3+9x^2-24x+10,\quad [1;5]$

Вариант 13.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$ 2. $y=-x^3-9x^2-24x+1$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4,\ [-3;1]$

Вариант 14.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-4x$ 2. $y=-x^3+6x^2+24x-5$ 3. $y=-x^3+9x^2-24x+10,\quad [3;6]$

Вариант 15.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ 2. $y=x^3+3x^2+24x-8$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4,\ [-2;4]$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как исследовать функцию на монотонность?
2. Что такое экстремумы функции?
3. Как исследовать функцию на выпуклость и точку перегиба?
4. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Цель:

- сформировать навыки интегрирования функций по табличным формулам и свойствам неопределённых интегралов;
- развить умение интегрировать методом замены переменной;
- закрепить знания о свойствах интегралов.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Таблица интегралов».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

1. Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию. С помощью интегрирования по данной производной или дифференциалу функции находится сама функция. Например, если $F'(x)=7x^6$, то $F(x)=x^7$, т.к. $(x^7)'=7x^6$

2. Дифференцируемая функция $F(x)$, $x\in[a;b]$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $[a;b]$, если $F'(x)=f(x)$ для каждого $x\in[a;b]$.

Так, для функции $f(x)=1/\cos^2 x$ первообразной служит функция $F(x)=tgx$, поскольку $(tgx)'=1/\cos^2 x$.

3. Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ на интервале $[a;b]$, называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и пишут $\int f(x)dx=F(x)+C$. Здесь $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; $f(x)$ - подынтегральная функция; x - переменная интегрирования; dx - дифференциал; $F(x)$ - первообразная; C - произвольная постоянная.

Например, $\int 5x^4dx=x^5+C,$ т.к. $(x^5+C)'=5x^4$.

4. Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx=f(x)dx$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой

функции, сложенной с произвольной постоянной, т.е. $\int dF(x)dx = F(x) + C$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

5. Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$.
3. $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$
7. $\int \cos xdx = \sin x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arctgx + C.$

6. Пример 1. Вычислить интеграл: $\int 4\left(x^2 - x + 3\right)dx.$

Решение. Используя свойства и формулы табличных интегралов: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int dx = x + C$ получим:

$$\int 4\left(x^2 - x + 3\right)dx = \int \left(4x^2 - 4x + 12\right)dx = 4\int x^2 dx - 4\int xdx + 12\int dx = 4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 12x + C =$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C;$$

Если интеграл трудно привести к табличному виду с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки.

Пример 2. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

Решение. Произведем постановку

$$t = 2 - 3x^2,\ \textit{тогда}\ dt = (2-3x^2)' \cdot \mathrm{dx} = -6xdx,\ \textit{откуда}\ xdx = -\frac{1}{6}dt.$$

Далее, получаем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{(-1/6)dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{6} \cdot \int t^{-1/2}dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = -\frac{1}{6} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{t} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (2+\cos x)^2 \cdot \sin xdx.$

Решение. Сначала положим

$t=2+\cos x,$ *тогда* $dt=(2+\cos x)'\cdot \mathrm{dx}=-\sin xdx,$ *откуда* $\sin xdx=-dt.$

Далее, получаем:

$$\int (2+\cos x)^2 \sin xdx=\int t^2(-dt)=-\int t^2dt=-\frac{t^{2+1}}{2+1}+C=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot t^3+C=-\frac{1}{3}(2+\cos x)^3+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл: $\int\left(2x^3+1\right)^4 x^2dx.$

Решение. Данный интеграл содержит сложную степенную функцию, приведём его к табличному виду. Воспользуемся подстановкой $2x^3+1=u.$ Дифференцируя, имеем $6x^2dx=du,$ откуда $x^2dx=(1/6)du.$ Подставив в данный интеграл эти выражения, получим:

$$\int\left(2x^3+1\right)^4 x^2dx=\frac{1}{6}\int u^4du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C=\frac{u^5}{30}+C.$$

Заменив *u* его выражением через *x*, находим:

$$\int\left(2x^3+1\right)^4 x^2dx=\frac{u^5}{30}+C=\frac{1}{30}\left(2x^3+1\right)^5+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл: $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx.$

Решение. Используем также метод замены переменной: положим $arctgx=t,$ откуда: $\frac{1}{1+x^2}dx=dt.$ Подставив эти выражения в данный интеграл, получим:

$$\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C$$

Заменив *t* его выражением через *x*, находим:

$$\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\left(arctgx\right)^2+C.$$

В практике интегрирования часто встречаются интегралы, для нахождения которых можно использовать следующие формулы $(k\neq 0, n\neq 0-\text{постоянные})$:

1. $\int e^{kx}dx.=\frac{1}{k}e^{kx}+C$
2. $\int a^{kx}dx.=\frac{1}{k}\frac{a^{kx}}{\ln a}+C$
3. $\int \sin kxdx.=-\frac{1}{k}\cos kx+C$
4. $\int \cos kxdx.=\frac{1}{k}\sin kx+C$
5. $\int\frac{dx}{\cos^2 kx}.=\frac{1}{k}tgkx+C$
6. $\int\frac{dx}{\sin^2 kx}.=-\frac{1}{k}ctgkx+C$
7. $\int\frac{dx}{k^2+n^2x^2}.=\frac{1}{nk}arctg\frac{n}{k}x+C$
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-n^2x^2}}.=\frac{1}{n}\arcsin\frac{n}{k}x+C$

Так, при нахождении $\int \sin 10xdx.$ можно использовать формулу $\int \sin kxdx = -(1/k)\cos kx + C,$ где $k = 10$. Тогда $\int \sin 10xdx. = -(1/10)\cos 10x + C.$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти интеграл непосредственным интегрированием.

II. Найти интеграл методом замены переменной.

Вариант 1.

1. $\int (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1)dx;$ 2. а) $\int (2x^3 - 1)x^2 dx;$ б) $\int \frac{\sin xdx}{3 - \cos x}.$

Вариант 2.

1. $\int (6x^2 - 3x + \sqrt{x} - 2)dx;$ 2. а) $\int e^{\sin x} \cos xdx;$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$

Вариант 3.

1. а) $\int (2x - 15x^2 + x^4 + 7)dx;$ 2. а) $\int (x^2 + 1)xdx;$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{3\sin x + 1}}.$

Вариант 4.

1. а) $\int (5x^4 - 3x^2 + 2x - 8)dx;$ 2. а) $\int \sin x \cos^2 xdx;$ б) $\int \frac{4xdx}{\sqrt{1 + 3x^2}}.$

Вариант 5.

1. а) $\int (8x^2 - 4x + \sqrt{x} + 6)dx;$ 2. а) $\int (x^2 - 2)^2 xdx;$ б) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}.$

Вариант 6.

1. а) $\int 3(2x^2 - 1)^2 dx;$ 2. а) $\int e^{\cos x} \sin xdx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$

Вариант 7.

1. а) $\int (5x^3 - 2x^2 + 8x - \sqrt{x})dx;$ 2. а) $\int (x^2 - 1)^3 xdx;$ б) $\int \frac{\cos xdx}{2 + \sin x}.$

Вариант 8.

1. а) $\int \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 9 \right) dx;$ 2. а) $\int 3\sin^2 x \cos xdx;$ б) $\int \frac{4dx}{9 + 16x^2}.$

Вариант 9.

1. а) $\int (3\sqrt{x} - 4x^3 + 2x - 3)dx;$ 2. а) $\int (4x^3 + 1)^5 x^2 dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2(\Pi/6 + x)}.$

Вариант 10.

1. а) $\int (6x^5 - 3x^2 + 2x - 2)dx;$ 2. а) $\int \cos(\Pi/3 - x)dx;$ б) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$

Вариант 11.

1. а) $\int \left(4x^2 + \sqrt{x} - 8x + 5 \right) dx;$ 2. а) $\int (5 - 2x^2)^4 xdx;$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}.$

Вариант 12.

1. а) $\int \frac{x^3+5x^2-6x+2}{x}dx;$ 2. а) $\int tg^2 xdx;$ б) $\int \frac{x^2dx}{2x^3+3}.$

Вариант 13.

1. а) $\int (4x^3-2x+\sqrt{x}-7)dx;$ 2. а) $\int \sqrt{(2x-1)^3}dx;$ б) $\int \frac{2\sin xdx}{(1-\cos x)^2}.$

Вариант 14.

1. а) $\int 4(1+x^2)^2 dx;$ 2. а) $\int (e^x-1)^4 e^x dx;$ б) $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^3}.$

Вариант 15.

1. а) $\int (8x^5-4x^3+x-3)dx;$ 2. а) $\int (3x^4-1)^2 6x^3 dx;$ б) $\int \frac{tg^3 xdx}{\cos^2 x}.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют неопределённым интегралом?
2. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
3. Запишите табличные интегралы.
4. Перечислите основные методы интегрирования.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 15

ПРИЛОЖЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Цель:

- сформировать навыки нахождения функции по её дифференциалу;

- развить умение составлять уравнение кривой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом;

- закрепить знания о физических приложениях неопределённого интеграла.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Таблица интегралов».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу - задача неопределённая, так как $\int f(x)dx$ есть множество первообразных функций вида $y = F(x) + C.$ Чтобы из множества первообразных выделить одну определённую функцию, должны быть заданы начальные условия - частные значения *x* и *y*, по которым находят единственное значение С, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Пример 1. Найти функцию по её дифференциалу $dy = \left(4x^3 - 6x^2 + 3x - 2\right)dx,$ если *y = 2 при x = 3.*

Решение:

Проинтегрируем обе части данного равенства: $\int dy = \int\left(4x^3 - 6x^2 + 3x - 2\right)dx,$ откуда $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + C.$ Найдём значение постоянной *C* при заданных начальных условиях *y = 2 при x = 3:* $2 = 3^4 - 2\cdot 3^3 + 3^2 - 3\cdot 3 + C, \textit{ откуда } C = -23.$ Итак, функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, имеет вид: $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 23.$

Пример 2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = 4x - 3.$

Решение:

Согласно условию: $k = \dfrac{dy}{dx} = 4x - 3, \quad \textit{откуда} \Rightarrow dy = (4x - 3)\,dx.$

Проинтегрировав обе части равенства, получим:

$$\int dy = \int(4x - 3)dx, \qquad \int dy = 4\int xdx - 3\int dx, \qquad y = 4\frac{x^2}{2} - 3x + C = 2x^2 - 3x + C.$$

Используя начальные условия $x = 2$ и $y = -3$, находим *C*:

$$-3 = 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + C, \qquad -3 = 2 + C, \qquad C = -5$$

Следовательно, искомое уравнение кривой имеет вид: $y = 2x^2 - 3x - 5.$

Пример 3. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $V = 6t^2 + 1.$ Найти закон движения, если за время $t = 3c$ точка прошла путь $s = 60\textit{м}.$

Решение:

Имеем: $ds = vdt = \left(6t^2 + 1\right)dt,$ тогда:

$$s = \int\left(6t^2 + 1\right)dt = 6\int t^2 dt + \int dt = 6\frac{t^3}{3} + t + C = 2t^3 + t + C$$

Подставив в найденное уравнение начальные условия: $s = 60\textit{м}$, $t = 3c$, получим $60 = 2\cdot 3^3 + 3 + C$, откуда $C = 3.$ Закон движения примет вид: $s = 2t^3 + t + 3.$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти функцию по её дифференциалу.

II. Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M (x; y)* с заданным угловым коэффициентом $k = \frac{dy}{dx}$.

III. Найти закон прямолинейного движения точки.

Вариант 1.

1. $dy = (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx,$ если у = 2 при х = 2.
2. *M (1; 2)* и $dy/dx = 1/2x.$
3. $V = 3t^2 - 2\,\mathrm{t}$, если *t = 3с при S = 10м*.

Вариант 2.

1. $dy = (8x^3 - 6x^2 - 2x + 4)dx,$ если у = 6 при х = 1.
2. *M (2; 1)* и $dy/dx = 1/2y.$
3. $V = 3t^2 + 4$, если *t = 2с при S = 20м*.

Вариант 3.

1. $dy = \left(8x^4 - 4x^3 + x - 3\right)dx,$ если у = 3 при х = 2.
2. *M (2; 2)* и $dy/dx = 1/4y.$
3. $V = t^2 - 8t + 2$, если *t = 3с при S = 30м*.

Вариант 4.

1. $dy = 4\left(1 + x^2\right)^2 dx,$ если у = 4 при х = 3.
2. *M (1 ; 3)* и $dy/dx = 1/4x.$
3. $V = 4t - 3t^2$, если *t = 2с при S = 40м*.

Вариант 5.

1. $dy = \left(4x^3 - 2x + \sqrt{x} - 7\right)dx,$ если у = 2 при х = 1.
2. *M (5 ; -2)* и $dy/dx = 1/2y.$
3. $V = 2t - 3$, если *t = 0с при S = 6м*.

Вариант 6.

1. $dy = \left(3x^2 + \sqrt{x} - 8x + 5\right)dx,$ если у = 5 при х = 1.
2. *M (4 ; 3)* и $dy/dx = 1/3y.$
3. $V = 2\cos t$,

если *t =π/6 с при S = 4м*.

Вариант 7.

1. $dy = \left(6x^5 - 3x^2 + 2x - 2\right)dx,$ если у = 3 при х = 2.
2. *M (3 ; 1)* и *k =2x-1*.
3. $V = t^2 - 4t + 3$, если *t = 3с при S = 20м*.

Вариант 8.

1. $dy = \left(3\sqrt{x} - 4x^3 + 2x - 3\right)dx,$ если у = 4 при х = 1.
2. *M (0 ; 3)* и $k = x^2 + 5x.$

3. $V=8t^3+3t^2-1$, если *t = 1c при S = 5м*.

Вариант 9.

1. $dy=\left(x^4-3x^2+\sqrt{x}-9\right)dx,$ если y = 2 при x = 1.
2. *M (2 ; -1)* и *k =* $1/2y$*.*
3. $V=3t^2-4t-4$, если *t = 2c при S = 8м*.

Вариант 10.

1. $dy=\left(5x^4-3x^2+8x-\sqrt{x}\right)dx,$ если y = 5 при x = 1.
2. *M (1 ; 3)* и *k = 2x-3.*
3. $V=-2\sin t$, если *t =π⁄3 c при S = 5м*.

Вариант 11.

1. $dy=3\left(2x^2-1\right)^2dx,$ если y = 6 при x = 4.
2. *M (1 ; 3)* и *k = -2x.*
3. $V=1-10t+3t^2$, если *t = 0c при S = 10м*.

Вариант 12.

1. $dy=\left(8x^2-4x+\sqrt{x}+6\right)dx,$ если y = 3 при x = 1.
2. *M (1 ; e)* и $dy/dx=x+1$.
3. $V=6t+3t^2$, если *t = 2c при S = 40м*.

Вариант 13.

1. $dy=\left(4x^3-3x^2+4x-8\right)dx,$ если y = 5 при x = 3.
2. *M (-2 ; -8/3)* и $k=x^2$.
3. $V=3t^2-6t+4$, если *t = 0c при S = 8м*.

Вариант 14.

1. $dy=\left(2x-15x^2+x^4+7\right)dx,$ если y = 3 при x = 2.
2. *M (0 ; 4)* и *k = 3x-4.*
3. $V=3t^2+4t-1$, если *t = 0c при S = 0м*.

Вариант 15.

1. $dy=\left(6x^2-3x+\sqrt{x}-2\right)dx,$ если y = 4 при x = 1.
2. *M (1 ; 3)* и $k = 3x^2+2$.
3. $V=4\cos t$, если *t = π/6 c при S = 8м*.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как найти функцию по её дифференциалу?
2. Опишите алгоритм нахождения уравнения кривой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом.
3. Сформулируйте физические приложения неопределённого интеграла.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 16

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Цель:

- сформировать навыки вычисления определённых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница;
- развить умение интегрировать методом замены переменной;
- закрепить знания о свойствах определённых интегралов;

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Таблица интегралов».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Интеграл, имеющий заданные пределы интегрирования, называют определённым. Непосредственное вычисление определенного интеграла производится по формуле *Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где a - нижний предел, b - верхний предел, *F(x)*- первообразная функции *f(x), F(b)и F(a)*-значения первообразной на концах промежутка.

Из этой формулы виден порядок вычисления определенного интеграла:

1) найти одну из первообразных *F(x)* данной функции;

2) вычислить значения *F(x)* при *x=a* и *x=b;*

3) найти разность $F(b) - F(a)$.

Пример 1. Вычислить интеграл: $\int_1^3 4\left(x^2 - x + 3\right)dx.$

Решение. Используя формулы табличных интегралов $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int dx = x + C$ и их свойства получим:

$$\int_1^3 4\left(x^2 - x + 3\right)dx = \int_1^3 \left(4x^2 - 4x + 12\right)dx = 4\int_1^3 x^2dx - 4\int_1^3 xdx + 12\int_1^3 dx = 4\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 - 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3 + 12\,x\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{4}{3}x^3\Big|_1^3 - 2x^2\Big|_1^3 + 12x\Big|_1^3 = \frac{4}{3}(3^3 - 1^3) - 2(3^2 - 1^2) + 12(3-1) = \frac{4}{3}\cdot 26 - 2\cdot 8 + 12\cdot 2 = \frac{128}{3};$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Воспользуемся свойствами степени с дробным отрицательным показателем $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-m/n}$ и вычислим определенный интеграл по формуле

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$: $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-2/3} dx = \frac{x^{1/3}}{1/3}\Big|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 = 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 3(2-1) = 3.$

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x))dx.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3+2)^2}$.

Решение.

1). Подынтегральная функция является сложной степенной, непосредственное вычисление по формуле Ньютона-Лейбница невозможно, применим интегрирование методом замены переменной. Произведем подстановку $(x^3+2) = t$, тогда $3x^2 dx = dt, x^2 dx = 1/3\,dt$.

2). Определим пределы интегрирования для переменной t. При $x = 1$, получаем $t_н = 1^3 + 2 = 3$, при $x = 2$, находим $t_в = 2^3 + 2 = 10.$

3) Выразим подынтегральное выражение через t и dt и перейдём к новым пределам интегрирования, в результате получим:

$$\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3+2)^2} = \int_3^{10} \frac{1/3\,dt}{t^2} = \frac{1}{3}\int_3^{10} t^{-2} dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_3^{10} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\Big|_3^{10} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{10} - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\cdot(-\frac{7}{30}) = \frac{7}{90}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x dx.$.

Решение. 1). Положим $\cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$ и $\sin x dx = -dt.$

2). Определим новые пределы интегрирования:

$t_н = \cos 0 = 1$, $t_в = \cos(\pi/2) = 0$.

3). Выразим подынтегральное выражение через ***t*** и ***dt*** и, применяя свойства определённого интеграла, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=-\int_1^0\sqrt{t}dt=\int_0^1 t^{1/2}dt=\frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin^3 xdx.$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральное выражение $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x=\sin x-\cos^2 x\sin x$

Затем вычислим интеграл от разности функций, заменив его разностью определенных интегралов от каждой функции:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3 xdx=\int_0^{\pi/2}\sin xdx-\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin xdx.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно:

$$\int_0^{\pi/2}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=-(\cos\ (\pi/2)-\cos 0)=-(0-1)=1;$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin xdx=-\int_0^t t^2dt=-\frac{t^2}{3}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}(0-1)=\frac{1}{3}.$$

Пусть *cos x = t*, тогда - *sinx dx = dt*, откуда *sinxdx = - dt*, $t_н=\cos 0=1$, $t_в=\cos(\pi/2)=0$.

Тогда, $\int_0^{\pi/2}\sin^3 xdx.=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Вычислить интеграл по формуле Ньютона - Лейбница.
2. Найти интеграл методом замены переменной.

Вариант 1.

1. $\int_1^3\left(4x^3-6x^2+2x+1\right)dx;$ 2. а) $\int_0^2\left(2x^3-1\right)x^2dx;$ б) $\int_0^{\pi}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}.$

Вариант 2.

1. $\int_1^4\left(6x^2-3x+\sqrt{x}-2\right)dx;$ 2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx;$ б) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}.$

Вариант 3.

1. $\int_1^2\left(2x-15x^2+x^4+7\right)dx;$ 2. а) $\int_2^3\left(x^2+1\right)xdx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sqrt{3\sin x+1}}.$

Вариант 4.

1. $\int_2^3\left(5x^4-3x^2+2x-8\right)dx;$ 2. а) $\int_0^{\pi}\sin x\cos^2 xdx;$ б) $\int_0^1\frac{4xdx}{\sqrt{1+3x^2}}.$

Вариант 5.

1. $\int_1^4 \left(8x^2-4x+\sqrt{x}+6\right)dx;$ 2. а) $\int_1^3 \left(x^2-2\right)^2 xdx;$ б) $\int_0^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}.$

Вариант 6.

1. $\int_1^2 3\left(2x^2-1\right)^2 dx;$ 2. а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\cos x}\sin xdx;$ б) $\int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

Вариант 7.

1. $\int_1^4 \left(5x^3-2x^2+8x-\sqrt{x}\right)dx;$ 2. а) $\int_0^2 \left(x^2-1\right)^3 xdx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{2+\sin x}.$

Вариант 8.

1. $\int_1^4 \left(x^4-x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}-9\right)dx;$ 2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x\cos xdx;$ б) $\int_0^1 \frac{4dx}{9+16x^2}.$

Вариант 9.

1. $\int_1^4 \left(3\sqrt{x}-4x^3+2x-3\right)dx;$ 2. а) $\int_0^1 \left(4x^3+1\right)^5 x^2dx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2\left(\pi/6+\mathrm{x}\right)}.$

Вариант 10.

1. $\int_2^3 \left(6x^5-3x^2+2x-2\right)dx;$ 2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\pi/3\text{-x}\right)dx;$ б) $\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{3x^2+1}}.$

Вариант 11.

1. $\int_1^4 \left(4x^2+\sqrt{x}-8x+5\right)dx;$ 2. а) $\int_1^2 \left(5-2x^2\right)^4 xdx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$

Вариант 12.

1. $\int_1^2 \frac{x^3+5x^2-6x+2}{x}dx;$ 2. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 xdx;$ б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{2x^3+3}.$

Вариант 13.

1. $\int_1^4 \left(4x^3-2x+\sqrt{x}-7\right)dx;$ 2. а) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\left(2x-1\right)^3}dx;$ б) $\int_0^{\pi} \frac{2\sin xdx}{\left(1-\cos x\right)^2}.$

Вариант 14.

1. $\int_2^3 4\left(1+x^2\right)^2 dx;$ 2. а) $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^xdx;$ б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^3}.$

Вариант 15.

1. $\int_2^3 \left(8x^5-4x^3+x-3\right)dx;$ 2. а) $\int_0^1 \left(3x^4-1\right)^2 6x^3dx;$ б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^3 xdx}{\cos^2 x}.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют определённым интегралом?
2. Сформулируйте свойства определенного интеграла.
3. Запишите формулу Ньютона - Лейбница.
4. Перечислите основные методы интегрирования.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 17

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Цель:

- сформировать навыки решения физических задач с помощью определённых интегралов;

- развить умение находить площадь плоской фигуры с помощью определённого интеграла.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Таблица интегралов».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

1. Путь, пройденный точкой. Если точка движется прямолинейно и её скорость $v = f(t)$ есть известная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1; t_2]$, вычисляется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (1)$$

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 0{,}1t^3$ м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 10с.

Решение. Применяя формулу (1), находим искомый путь:

$$s = \int_0^{10} 0{,}1t^3 dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{t^4}{4}\bigg|_0^{10} = \frac{1}{40}\cdot 10^4 = 250(м)$$

2. Работа силы. Если переменная сила $F = F(x)$ действует в направлении оси Ох, то работа силы на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (2)$$

Пример 2. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 0,06м, если сила 1 Н растягивает ее на 0,01м?

Решение. Согласно закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину на x м, равна $F = kx$, где k - коэффициент пропорциональности. Из условия следует, $1 = k \cdot 0.01$, т.е. $k = 100$, и, следовательно $F = 100x$. Искомую работу находим по формуле (2):

$$A = \int_0^{0,06} 100x dx = 100 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.06} = 50 \cdot 0.0036 = 0.18(\textit{Дж});$$

Пример 3. Сила 196,2 Н растягивает пружину на 18 см. Какую работу она производит?

Решение. По закону Гука $F = kx$, откуда $k = F / x = 196.2 / 0.18 = 1090\,(Н / м)$.

Значит, $F = 1090x$. Находим искомую работу по формуле (2):

$$A = \int_0^{0.18} 1090x dx = 1090 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.18} \approx 545 \cdot 0.18^2 \approx 17.7(\textit{Дж}).$$

3. Площадь плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции aABb (рис.1), ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью Ox, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx \tag{3}$$

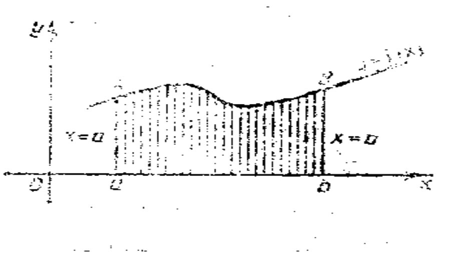


Рис.1.

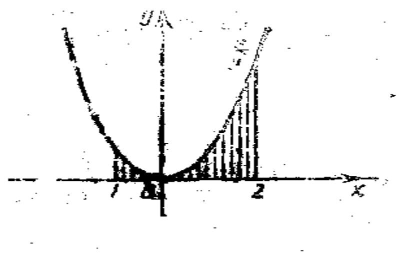


Рис.2.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс (рис.2).

Решение. Применяя формулу (1), получаем

$$S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^2\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8-(-1)) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3,$$ т.е. $S = 3$ кв.ед.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени.

2. Вычислить работу, совершаемую при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Вариант 1.

1. $V = 3t^2 + 4t - 1, t_1 = 0, t_2 = 4.$

2. $x_1 = 0,02\ м,\ A_1 = 30\ Дж,\ x_2 = 0,03\ м,\ A_2 - ?$

3. $x - y + 2 = 0, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2.$

Вариант 2.

1. $V = t^2 - 8t + 2, t_1 = 0, t_2 = 3.$

2. $x_1 = 0,01\ м,\ F_1 = 10\ Н,\ x_2 = 0,08\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = x^2 - 8x + 18, \quad y = -2x + 18.$

Вариант 3.

1. $V = 2t - 3, t_1 = 0, t_2 = 5.$

2. $x_1 = 0,03\ м,\ F_1 = 15\ Н,\ x_2 = 0,06\ м,\ A_2 - ?$

3. $x - y + 3 = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad y = 0.$

Вариант 4.

1. $V = 4\cos t,\ t_1 = \dfrac{\pi}{6}, t_2 = \dfrac{\pi}{2}.$

2. $x_1 = 0,01\ м,\ F_1 = 10\ Н,\ x_2 = 0,06\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 3.$

Вариант 5.

1. $V = 3t^2 + 4, t_1 = 0, t_2 = 6.$

2. $x_1 = 0,02\ м,\ F_1 = 60\ Н,\ x_2 = 0,12\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 6.$

Вариант 6.

1. $V = 3t^2 - 2t, t_1 = 0, t_2 = 3$

2. $x_1 = 0,02\ м,\ A_1 = 16\ Дж,\ A_2 = 100\ Дж,\ x_2 - ?$

3. $y = -3x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$

Вариант 7.

1. $V = 4t - 3t^2, t_1 = 0, t_2 = 4.$

2. $x_1 = 0,05\ м,\ A_1 = 30\ Дж,\ x_2 = 0,08\ м,\ A_2 - ?$

3. $x - 2y + 4 = 0, \quad x + y - 5 = 0, \quad y = 0.$

Вариант 8.

1. $V = 3t^2 - 6t + 4, t_1 = 0, t_2 = 5.$

2. $x = 0,02\ м,\ F = 80\ Н,\ x_1 = 0,15\ м,\ x_2 = 0,2\ м, A - ?$

3. $y = -x^2 + 6x - 5, \quad y = 0.$

Вариант 9.

1. $V = 2\cos t, t_1 = \dfrac{\pi}{6}, t_2 = \pi.$

2. $x = 0,01\ м,\ F = 20\ Н,\ x_1 = 0,02\ м,\ x_2 = 0,04\ м, A - ?$

3. $x-2y+4=0, \quad 3x+2y-12=0, \quad y=0.$

Вариант 10.

1. $V=t^2-4t+3,\ t_1=0, t_2=6.$
2. $x=0,01\,м,\ F=50\ Н,\ x_1=0,02\ м,\ x_2=0,12\,м,\ A-?$
3. $y=6-x, \quad y=x^2+4.$

Вариант 11.

1. $V=3t^2-4t-4, t_1=0, t_2=3.$
2. $x_1=0,05\ м,\ A_1=25\ Дж,\ x_2=0,1\ м,\ A_2-?$
3. $4y=x+2, \quad y=3-x.$

Вариант 12.

1. $V=6t+3t^2, t_1=0, t_2=4.$
2. $x_1=0,04\ м,\ A_1=20\ Дж,\ A_2=80\ Дж,\ x_2-?$
3. $y=-x^2+5, \quad y=x+3.$

Вариант 13.

1. $V=8t^3+3t^2-1, t_1=0, t_2=5.$
2. $x_1=0,03\ м,\ A_1=30\ Дж,\ x_2=0,04\ м,\ A_2-?$
3. $y=-x, \quad y=2-x, \quad x=-2, \quad x=4.$

Вариант 14.

1. $V=-2\sin t,\ t_1=\dfrac{\pi}{3}, t_2=\dfrac{\pi}{2}.$
2. $x_1=0,02\ м,\ F_1=40\ Н,\ x_2=0,05\ м,\ A_2-?$
3. $y=x^3-3x, \quad y=x.$

Вариант 15.

1. $V=1-10t+3t^2, t_1=0, t_2=6.$
2. $x_1=0,04\ м,\ F_1=20\ Н,\ x_2=0,06\ м,\ A_2-?$
3. $y=x, \quad y=5-x, \quad x=1, \quad x=2.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени?
2. Запишите формулу работы, совершаемой при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе.
3. Сформулируйте правила вычисления площади фигуры, ограниченной заданными линиями?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 18

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Цель:

- сформировать навыки приближённого вычисления определённых интегралов с заданной точностью;
- развить умение находить значения функций в заданных точках;
- закрепить знания о формулах приближённых вычислений.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, микрокалькуляторы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Приближенные методы вычисления определенного интеграла в большинстве случаев основаны на том, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, сегментом оси OX и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, проведенными через эти точки. Благодаря этому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенном вычислении площади криволинейной трапеции.

Идея приближенного вычисления интеграла заключается в том, что кривая заменяется новой, достаточно «близкой» к ней кривой. В зависимости от выбора новой кривой мы получим ту или иную приближенную формулу интегрирования.

1. Формула прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \hbar\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right],$$

где $\hbar = \dfrac{b-a}{n}, n \text{ указано в условии задачи}, x_i = a + i\hbar, \mathrm{i} = 0;1;2;\ldots;\mathrm{n}-1.$

2. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \hbar\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right],$$

где $\hbar = \dfrac{b-a}{n}, n \text{ указано в условии задачи}, x_i = a + i\hbar, \mathrm{i} = 0;1;2;\ldots;\mathrm{n}.$

3. Формула параболических трапеций (формула Симпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[f(x_0)+f(x_{2n})+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1})+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2n-2})].$$

Пример 1. Найти приближенное значение интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, вычисленное по формуле прямоугольников при $n=10$ с точностью до 0,001:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \hbar[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})]$$

Решение. По условию $n=10$, тогда $\hbar = \frac{2-1}{10} = 0.1$, $x_i = 1 + i \cdot 0.1$; $\mathrm{i} = 0;1;2;\ldots;9.$

Найдём значения аргументов x_i и соответствующие значения функции $f(x_i)$ с шагом 0,1:

$x_i = 1+i\cdot 0.1;$	$f(x_i)= 1/x_i$
$x_0 = 1+0\cdot 0.1 = 1;$	$f(x_0)= 1/x_0=1/1=1$
$x_1 = 1+1\cdot 0.1 = 1.1;$	$f(x_1)= 1/x_1=1/1.1\approx 0.909$
$x_2 = 1+2\cdot 0.1 = 1.2;$	$f(x_2)= 1/x_2=1/1.2\approx 0.833$
$x_3 = 1+3\cdot 0.1 = 1.3;$	$f(x_3)= 1/x_3=1/1.3\approx 0.769$
$x_4 = 1+4\cdot 0.1 = 1.4;$	$f(x_4)= 1/x_4=1/1.4\approx 0.714$
$x_5 = 1+5\cdot 0.1 = 1.5;$	$f(x_5)= 1/x_5=1/1.5\approx 0.667$
$x_6 = 1+6\cdot 0.1 = 1.6;$	$f(x_6)= 1/x_6=1/1.6\approx 0.625$
$x_7 = 1+7\cdot 0.1 = 1.7;$	$f(x_7)= 1/x_7=1/1.7\approx 0.588$
$x_8 = 1+8\cdot 0.1 = 1.8;$	$f(x_8)= 1/x_8=1/1.8\approx 0.556$
$x_9 = 1+9\cdot 0.1 = 1.9;$	$f(x_9)= 1/x_9=1/1.9\approx 0.526$

Подставим найденные значения в формулу прямоугольников и вычислим приближённое значение интеграла с точностью до 0,001:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0.1\cdot[1+0.909+0.833+0.769+0.714+0.667+0.625+0.588+0.556+0.526] \approx 0.719$$

Пример 2. Найти приближенное значение интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, вычисленное по формуле трапеций при $n=10$ с точностью до 0,0001:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \hbar\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right]$$

Решение. По условию $n=10$, тогда $\hbar = \frac{2-1}{10} = 0.1$, $x_i = 1 + i \cdot 0.1$; $\mathrm{i} = 0;1;2;\ldots;10.$

Найдём значения аргументов x_i и соответствующие значения функции $f(x_i)$ с шагом 0,1:

$x_i = 1+i\cdot 0.1;$	$f(x_i)= 1/x_i$
$x_0 = 1+0\cdot 0.1 = 1;$	$f(x_0)= 1/x_0=1/1=1$

$x_1 = 1+1\cdot 0.1 = 1.1;$	$f(x_1) = 1/x_1 = 1/1.1 \approx 0.9091$
$x_2 = 1+2\cdot 0.1 = 1.2;$	$f(x_2) = 1/x_2 = 1/1.2 \approx 0.8333$
$x_3 = 1+3\cdot 0.1 = 1.3;$	$f(x_3) = 1/x_3 = 1/1.3 \approx 0.7692$
$x_4 = 1+4\cdot 0.1 = 1.4;$	$f(x_4) = 1/x_4 = 1/1.4 \approx 0.7142$
$x_5 = 1+5\cdot 0.1 = 1.5;$	$f(x_5) = 1/x_5 = 1/1.5 \approx 0.6667$
$x_6 = 1+6\cdot 0.1 = 1.6;$	$f(x_6) = 1/x_6 = 1/1.6 \approx 0.6250$
$x_7 = 1+7\cdot 0.1 = 1.7;$	$f(x_7) = 1/x_7 = 1/1.7 \approx 0.5882$
$x_8 = 1+8\cdot 0.1 = 1.8;$	$f(x_8) = 1/x_8 = 1/1.8 \approx 0.5556$
$x_9 = 1+9\cdot 0.1 = 1.9;$	$f(x_9) = 1/x_9 = 1/1.9 \approx 0.5263$
$x_{10} = 1+10\cdot 0.1 = 2;$	$f(x_{10}) = 1/x_{10} = 1/2 = 0.5$

Подставим найденные значения в формулу трапеций и вычислим приближённое значение интеграла с точностью до 0,0001:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0.1\left[\frac{1+0.5}{2} + 0.9091 + 0.8333 + 0.7692 + 0.7142 + 0.6667 + 0.625 + 0.5882 + 0.5556 + 0.5263\right] \approx 0.6938.$$

Пример 3. Найти приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, вычисленное по формуле Симпсона при $n=2$ с точностью до 0,0001:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{2n-1}) + 2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{2n-2})].$$

Решение. По условию

$n = 2$, тогда $\hbar = \frac{b-a}{6n} = \frac{1-0}{12} = \frac{1}{12}$, $x_i = 0 + i\cdot\frac{1}{12} = i\cdot\frac{1}{12}$; i = 0;1;2.

Найдём значения аргументов x_i и соответствующие значения функции $f(x_i)$ с шагом $1/12$:

$x_i = i\cdot 1/12;$	$f(x_i) = 1/1+x^2_i$
$x_0 = 0\cdot 1/12 = 0;$	$f(x_0) = 1/1+x^2_0 = 1/1 = 1$
$x_1 = 1\cdot 1/12 = 1/12;$	$f(x_1) = 1/1+x^2_1 = 1/145/144 \approx 0.9931$
$x_2 = 2\cdot 1/12 = 1/6;$	$f(x_2) = 1/1+x^2_2 = 1/37/36 \approx 0.9730$
$x_3 = 3\cdot 1/12 = 1/4;$	$f(x_3) = 1/1+x^2_3 = 1/17/16 \approx 0.9412$
$x_4 = 4\cdot 1/12 = 1/3;$	$f(x_4) = 1/1+x^2_4 = 1/10/9 \approx 0.9$

Подставим найденные значения в формулу Симпсона и вычислим приближённое значение интеграла с точностью до 0,0001:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{6\cdot 2}[f(x_0) + f(x_4) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2)].$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}[1 + 0.9 + 4(0.9931 + 0.9412) + 2\cdot 0.9730] \approx \frac{1}{12}\cdot 11.5832 \approx 0.9652.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Найти приближённые значения интегралов по формуле прямо-

угольников.

2. Вычислить приближённое значение интеграла по формуле трапеций с точностью до 0,0001.

3. Найти приближённое значение интеграла по формуле Симпсона с точностью до 0,001.

1. а) $\int_0^5 (x+3)dx$, $n = 5$. б) $\int_2^7 (x^2+1)dx$, $n = 5$. в) $\int_0^4 (x^3-2)dx, n=4.$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, n=10.$ 3. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{x}, n=3.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как найти приближённое значение интеграла по формуле прямоугольников?

2. Запишите формулу трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла.

3. Формула Симпсона (формула параболических трапеций)?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 19

ОТНОШЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Цель:

- сформировать навыки задания множеств;
- развить умения устанавливать отношения множеств;
- закрепить знания о свойствах отношений;

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, чертёжные инструменты.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

На конкретных примерах покажем алгоритм выполнения операций над множествами, способы их заданий, установим отношения множеств.

Пример 1. Найти все подмножества множества А = { 1; 2; 3 }.

Решение: Данное множество состоит из 3-х элементов, n=3, значит, оно имеет 2^3 = 8 подмножеств. Тогда подмножествами данного множества являются следующие множества:

{ 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1; 2 }, { 1; 3 }, { 2; 3 }, { 1; 2; 3 }, {Ø}.

Пример 2. Определить все равные множеству А = {2,4,6,8} множества.

Решение: Множества называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, причем порядок их расстановки не имеет значения. Множество А состоит из 4-ёх элементов, значит, число перестановок его элементов равно 4!= 1*2*3*4=24. Таким образом, множество А имеет 24 равных множества, включая его само: A_1={2,4,6,8}, A_2={2,4,8,6}, A_3={2,6,4,8}, A_4={2,6,8,4}, A_5={2,8,4,6}, A_6={2,8,6,4}, A_7={4,2,6,8}, A_8={4,2,8,6}, A_9={4,6,8,2}, A_{10}={4,6,2,8}, A_{11}={4,8,6,2}, A_{12}={4,8,2,6}, A_{13}={6,4,2,8}, A_{14}={6,4,8,2}, A_{15}={6,2,4,8}, A_{16}={6,2,8,4}, A_{17}={6,8,4,2}, A_{18}={6,8,2,4}, A_{19}={8,6,4,2}, A_{20}={8,6,2,4}, A_{21}={8,2,6,4}, A_{22}={8,2,4,6}, A_{23}={8,4,6,2}, A_{24}={8,4,2,6}.

Пример 3. Указать характеристическое свойство элементов множества А ={12,22,32,42,52,62,72,82,92}.

Решение: Характеристическое свойство – свойство, которым обладает каждый элемент данного множества и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий. Все перечисленные элементы являются натуральными, двузначными и оканчиваются цифрой 2.

Задания для самостоятельного выполнения:

1) Найти все подмножества данного множества;
2) Определить все равные данному множеству множества;
3) Укажите характеристическое свойство элементов данного множества;

Вариант 1.

1. *A = { 1; 3; 7; 9 }.*
2. *A = { -3; -4; -5; -6 }.*
3. *A = { 11; 13; 15; 17;19 }.*

Вариант 2.

1. *A = { 3; 4; 5; 7 }.*
2. *A = { 3; 4; 6; 8 }.*
3. *A = { 21; 23; 25; 27;29 }.*

Вариант 3.

1. *A = { -1; -2; -3; -4 }.*
2. *A ={ 5; 1; 3; 6 }.*
3. *A ={ 18; 15; 12 }.*

Вариант 4.

1. *A = { -1; 0; 1; 2 }.*
2. *A = { 1; 2; 5; 8 }.*
3. *A ={ 10; 15; 20;25;30;35;40;45;50;55;60;65;70;75;80;85;90;95 }.*

Вариант 5.

1. *A = { 0; 1; 2; 6 }.*
2. *A = { 3; 1; 7; 9 }.*
3. *A = { 78; 76; 74; 72;70 }.*

Вариант 6.

1. *A = { 2; 6; 7; 8 }.*
2. *A = { 5; 2; 4; 3 }.*
3. *A = { 31; 33; 35; 37;39 }.*

Вариант 7.

1. *A = { 4; 6; 7; 9 }.*
2. *A = { 7; 9; 3; 5 }.*
3. *A = { 98; 96; 94; 92; 90 }.*

Вариант 8.
1. $A = \{ 1; 4; 5; 7; 9 \}$. 2. $A = \{ 3; 5; 7; 9 \}$.
3. $A =\{ 20; 22; 24; 26; 28 \}$.
Вариант 9.
1. $A = \{ 7; 8; 9; 3; 5 \}$. 2. $A = \{ 4; 6; 7; 9 \}$.
3. $A = \{ 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99 \}$.
Вариант 10.
1. $A = \{ 5; 2; 4; 3; 7 \}$. 2. $A = \{ 2; 6; 7; 8 \}$.
3. $A = \{ 41; 43; 45;47;49 \}$.
Вариант 11.
1. $A = \{ 3; 1; 7; 9; 5 \}$. 2. $A = \{ 0; 1; 2; 6 \}$.
3. $A =\{ 60; 62;64; 66; 68 \}$.
Вариант 12.
1. $A = \{ 7; 2; 9; 5; 1 \}$. 2. $A = \{ -1; 0; 1; 2 \}$.
3. $A =\{ 27; 24; 21 \}$.
Вариант 13.
1. $A = \{ 5; 1; 3; 6; 8 \}$. 2. $A = \{ -1; -2; -3; -4 \}$.
3. $A =\{ 30; 32; 34; 36; 38 \}$.
Вариант 14.
1. $A = \{ 2; 3; 4; 6; 9 \}$. 2. $A = \{ 1; 2; 3; 4 \}$.
3. $A = \{ 111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999 \}$.
Вариант 15.
1. $A = \{ 6; 7; 1; 1/2; 1/3 \}$. 2. $A = \{ 3; 4; 5; 7 \}$.
3. $A = \{ 88; 86; 84; 82; 80 \}$.

Вопросы для самоконтроля:
1. Перечислите способы задания множеств.
2. Какие множества называют равными?
3. Что называют характеристическим свойством множества?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 20

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Цель:
- сформировать навыки выполнения операций над множествами;
- развить умения построения кругов Эйлера - Венна;
- закрепить знания об отношениях множеств.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, чертёжные инструменты.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:
1. Изучить краткие теоретические сведения;

2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

На конкретных примерах покажем выполнение операций над множествами, графическое изображение множеств с помощью диаграмм Эйлера.

Пример 1. Найдите:

$A\cup B,\quad A\cap B,\quad A\setminus B,\quad B\setminus A$ *, если* $A=\{1;3;5;6\},\quad B=\{1;3\}.$

Решение:

Находим:

$A\cup B=\{1;3;5;6\}\cup\{1;3\}=\{1;3;5;6\}$

$A\cap B=\{1;3;5;6\}\cap\{1;3\}=\{1;3\}$

$A\setminus B=\{1;3;5;6\}\setminus\{1;3\}=\{5;6\}$

$B\setminus A=\{\varnothing\}.$

Пример 2. Найти декартово произведение множеств A={1,2,3} и B = {3,5}.

Решение:

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, образованных из элементов обоих множеств, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.

A × B= {(1;3),(1;5),(2;3),(2;5),(3;3),(3;5)}

A*B	**3**	**5**
1	**(1;3)**	**(1,5)**
2	**(2,3)**	**(2,5)**
3	**(3,3)**	**(3,5)**

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Изобразите на диаграммах Эйлера – Венна данные множества.

II. Выполните операции $A\cup B;\quad A\cap B;\quad A\setminus B;\quad B\setminus A.$

III. Найдите декартово произведение множеств $A\times B.$

Вариант 1.

1. $A\subset B, B\subset C.$
2. *A = { 3; 4; 5;7 }, B = { 3; 5; 6 }.*
3. *A = { 2; 3; 5; 6 }, B = { 1; 2; 3 }.*

Вариант 2.

1. $A\subset C, B\subset C, A\setminus B=\varnothing.$
2. *A={ 0; 1; 7; 8 }, B ={ -7; 0; 6; 9 }.*
3. *A = { 1; 5; 7; 9 }, B = { 4; 5; 7 }.*

Вариант 3.

1. $A\subset C, B\subset C, C=A\bigcup B.$
2. *A={ 1; 3; 5; 7 }, B = { 2; 4; 6; 8 }.*

3. $A = \{ 2; 4; 6; 9 \}$, $B = \{ 5; 7; 8 \}$.

Вариант 4.

1. $A \subset C, B \subset C, A \bigcap B \neq \varnothing.$ 2. $A = \{ 1; 2; 3 \}$, $B = \{ -1; 0; 2; 3 \}$.

3. $A = \{ 6; 3; 4; 8 \}$, $B = \{ 3; 2; 1 \}$.

Вариант 5.

1. $A \bigcap B \neq \varnothing, A \bigcap C \neq \varnothing, B \bigcap C \neq \varnothing, A \bigcap B \bigcap C \neq \varnothing.$

2. $A = \{ 1; 2; 3 \}$, $B = \{ 0; 1; 2; 3; 5 \}$. 3. $A = \{ 5; 6; 8; 9 \}$, $B = \{ 3; 1; 4 \}$.

Вариант 6.

1. $A \bigcap B = \varnothing, A \bigcap C = \varnothing, B \bigcap C \neq \varnothing.$

2. $A = \{ -3; -1; 0; 1 \}$, $B = \{ 2; -1; -2 \}$.

3. $A = \{ 0; 1 \}$, $B = \{ -1; 0; 1; 2 \}$.

Вариант 7.

1. $C \subset D, D \subset E.$ 2. $A = \{ -2; -1; 0; 1; 2 \}$, $B = \{ -1; 0; 4 \}$.

3. $A = \{ 6; 7; 9 \}$, $B = \{ 1; 2; 5; 7 \}$.

Вариант 8.

1. $C \subset E, D \subset E, C \setminus \mathrm{D} = \varnothing.$ 2. $A = \{ 0; 1; 2; 3; 7 \}$, $B = \{ 5; 3; 1; 0 \}$.

3. $A = \{ 3; 6; 8 \}$, $B = \{ 6; 3; 2; 1 \}$.

Вариант 9.

1. $C \subset E, D \subset E, E = C \bigcup D.$ 2. $A = \{ 1; 2; 3; 7 \}$, $B = \{0; 1; 3; 4 \}$.

3. $A = \{ 7; 8; 2; 1 \}$, $B = \{ 1; 2; 5; 7 \}$.

Вариант 10.

1. $C \subset E, D \subset E, C \bigcap D \neq \varnothing.$ 2. $A = \{ 5; 7; 8 \}$, $B = \{ 8; 9 \}$.

3. $A = \{ -2; -1; 0; 6 \}$, $B = \{ 2; 3; 6 \}$.

Вариант 11.

1. $C \bigcap D \neq \varnothing, C \bigcap E \neq \varnothing, D \bigcap E \neq \varnothing, C \bigcap D \bigcap E \neq \varnothing.$

2. $A = \{ 5; 6; 7; 8; 9 \}$, $B = \{6; 8; 9 \}$.

3. $A = \{ -6; 1; 2; 7; 8 \}$, $B = \{ 3; 6; -4 \}$.

Вариант 12.

1. $C \bigcap D = \varnothing, C \bigcap E = \varnothing, D \bigcap E \neq \varnothing.$ 2. $A = \{ 1; 2; 3; 4 \}$, $B = \{ 0; 1/2; 1\}$.

3. $A = \{ 4; 8; 2; 7 \}$, $B = \{ 1/3; 5; 1; 8 \}$.

Вариант 13.

1. $E \subset F, F \subset K.$ 2. $A = \{ 3; 4; 5; 7 \}$, $B = \{0; 1; 4; 7\}$

3. $A = \{ 2; 7; 0; 8; 9 \}$, $B = \{ 5; 1; 2; 3 \}$.

Вариант 14.

1. $E \subset K, F \subset K, E \setminus F = \varnothing.$ 2. $A = \{ 1/3; 4; 7; 9\}$, $B = \{ 6; 7; 9 \}$.

3. $A = \{ -1; 0; 1; 2 \}$, $B = \{ 5; 3; 4 \}$.

Вариант 15.

1. $E \subset K, F \subset K, K = E \bigcup F.$ 2. $A = \{1/6; 3; 4 \}$, $B = \{1/6; 2; 3; 4\}$.

3. $A = \{ 0; 1; 2; 5 \}$, $B = \{ 3; 4; 6; 7 \}$.

Вопросы для самоконтроля:
1. Перечислите основные операции над множествами.
2. Что изображают диаграммой Эйлера – Венна?
3. Дайте определение декартовому произведению множеств.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 21

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Цель:
- сформировать навыки решения комбинаторных задач;
- развить умения вычисления комбинаторных соединений;
- закрепить знания об элементах комбинаторики.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:
1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения: На основе конкретных примеров покажем способы вычисления перестановок, размещений, сочетаний, факториала.

Пример 1. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение:

Используем формулу вычисления: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Солдат в дозор можно выбрать $C_{80}^3 = \dfrac{80!}{3!(80-3)!} = \dfrac{80!}{3!77!} = 82160$ способами, а офицеров $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется 246480 способов.

Пример 2. Сколько двухзначных комбинаций можно составить из четырех букв *A, B, C, D*, при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение:

Так как двухзначные комбинации отличаются друг от друга или самими буквами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из четырех элементов по два.

Число размещений вычислим по формуле:

$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots [n-(m-1)]$

Итак, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Всего имеется 12 различных комбинаций.

Пример 3.

Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять P_6=6!=1*2*3*4*5*6=720 способами.

4 определенные книги можно переставлять P_4=4!=1*2*3*4*5*6=24 способами.

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет P_6*P_4=720*24=17280.

Задания для самостоятельного выполнения:

1-2. Решить комбинаторные задачи.

3. Найти корни уравнения.

Вариант 1.

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
2. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?
3. Решить уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.

Вариант 2.

1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек за столом?
2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов?
3. Решить уравнение: $A_x^3 = 56x$.

Вариант 3.

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых чисел?
2. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?
3. Решить уравнение: $30A_{x-2}^4 = A_x^5$.

Вариант 4.

1. Бригадир должен отправить на работу бригаду из трех человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?
2. На собрании должны выступать 5 человек (А, В, С, Д, Е). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если А должен выступать первым?
3. Решить уравнение: $A_{x+2}^4 = 30A_x^2$.

Вариант 5.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»?

3. Решить уравнение: $20\,A_{x-2}^{3} = A_{x}^{5}$.

Вариант 6.

1. Сколькими способами можно составить список из 6 человек?

2. Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя и секретаря?

3. Решить уравнение: $\frac{x}{A_{x}^{3}} = \frac{1}{12}$.

Вариант 7.

1. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 и 5?

2. Сколькими способами можно выбрать различные краски из имеющихся пяти?

3. Решить уравнение: $A_{x-2}^{3} = 4\,A_{x-3}^{2}$.

Вариант 8.

1. Сколькими различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7, 8, 9?

2. При встрече 16 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

3. Решить уравнение: $A_{x}^{5} = 18A_{x-2}^{4}$.

Вариант 9.

1. Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

2. Сколькими способами можно разместить в четырехместной каюте четырех человек?

3. Решить уравнение: $C_{10}^{x-1} = 2C_{10}^{x}$.

Вариант 10.

1. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

2. В местком избрано 11 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

3. Решить уравнение: $A_{x}^{4} = 15\,A_{x-2}^{3}$.

Вариант 11.

1. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 7?

2. Студенты данной группы изучают 8 учебных предметов. Если рас-

писание занятий каждого дня включается по 4 предмета, то сколькими способами могут быть распределены предметы в день?

3. Решить уравнение: $A_x^5 = 30A_{x-2}^4.$

Вариант 12.

1. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

2. Сколькими способами можно разложить семь монет различного достоинства в два кармана?

3. Решить уравнение: $8C_{105}^{x} = 3C_{105}^{x+1}.$

Вариант 13.

1. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом десятиугольнике?

2. Пять девушек и три юноши играют в баскетбол. Сколькими способами они могут быть разбиться на две команды по четыре игрока, если в каждой команде должно быть не менее одного юноши?

3. Решить уравнение: $A_{x+1}^4 = 5x(x+1).$

Вариант 14.

1. Сколько может быть случаев при выборе двух карандашей и трех ручек из пяти различных карандашей и пяти различных ручек?

2. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка одного за другим пять львов и четыре тигра. Сколькими способами он может это сделать, причем так, чтобы никакие два тигра не шли друг за другом?

3. Решить уравнение: $30x = A_x^3.$

Вариант 15.

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых чисел?

2. Из цифр 0, 1, 2 , 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

3. Решить уравнение: $A_{2x}^3 = 14A_x^3.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется n – факториалом?

2. Перечислите основные виды комбинаторных соединений.

3. Запишите формулы вычислений перестановок, размещений, сочетаний.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 22

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Цель:

- сформировать навыки решения вероятностных задач;
- развить умения вычисления вероятностей совместных и несовместных, независимых событий.
- закрепить знания о теоремах сложения и умножения вероятностей.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

На основе конкретных примеров покажем способы вычисления вероятностей события.

Пример 1.

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение.

Общее число различных исходов есть $n=1000$. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет $m=200$. Согласно формуле $P(A)=m/n$, получим $P(A)=200/1000=1/5=0,2$.

Пример 2.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение.

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев $n=5+3=8$. Число случаев m, благоприятствующих появлению события А, равно 3. По формуле $P(A)=m/n$ получим $P(A)=m/n=3/8=0,375$.

Пример 3.

Из урны, в которой находится 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение.

Обозначим событие, состоящее в проявлении черного шара, через А. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов

(12+8) по два: $n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$

Число случаев m, благоприятствующих событию А, составляет $m = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$

По формуле P(A)=m/n находим вероятность появления двух черных шаров: P(A)=m/n=28/190=14/95=0,147.

Пример 4.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение.

Пусть А - событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а В- в том, что оно кратно 5. Найдем Р(А+В). Так как А и В совместные события, то воспользуемся формулой Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ).

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10,11,…,98,99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события А); 18- кратными 5 (благоприятствуют наступлению события В) и 6- кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события АВ). Таким образом, Р(А)=30/90=1/3, Р(В)=18/90=1/5, Р(АВ)=6/90=1/15, т.е. Р(А+В)=1/3+1/5-1/15=7/15=0,467.

Пример 5.

В одной урне находится 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение.

Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В - появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы. Найдем Р(А) = 4/12=1/3, Р(В) = 3/12=1/4.

По формуле получим Р(АВ)=Р(А)*Р(В)=(1/3)*(1/4)=1/12=0,083.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти вероятности данных событий.

Вариант 1.

1. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наугад выбранных билетов два окажутся выигрышными?

2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. 4 карточки вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово “Югра”?

Вариант 2.

1. Из шести одинаковых карточек разрезной азбуки: “а”, ”е”, ”м”,”н”,”о”, ”р” наудачу выбирают четыре карточки и складывают их в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность при этом получить слово “море”?

2. В партии из 15 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероят-

ность того, что среди семи взятых наугад деталей 5 стандартных?

Вариант 3.

1. На шести одинаковых карточках написаны буквы “а”, ”в”, ”к”,”м”, ”о”, ”с” . Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово “Москва”?

2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Найдите вероятность того, что среди двух взятых наугад деталей одна бракованная?

Вариант 4.

1. Из урны, содержащей 5 шаров с цифрами 1, 2, 3,4,5 извлекают наудачу все шары один за другим. Какова вероятность того, что номера извлеченных шаров идут в порядке возрастания?

2. Экзаменационные билеты пронумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета нечётный?

Вариант 5.

1. В партии из 100 деталей 5 % бракованных. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется стандартной?

2. Трехтомное собрание сочинений М.Ю. Лермонтова расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

Вариант 6.

1. Из полного набора домино наудачу извлекают одну кость. Какова вероятность того, что число очков на ней четно?

2. Из 50 электролампочек имеется 4 бракованных. Какова вероятность того, что две взятые наугад лампы окажутся бракованными?

Вариант 7.

1. Из 60 экзаменационных вопросов учащийся подготовил 50. На экзамене он должен ответить на два вопроса. Какова вероятность того, что учащийся ответит на оба вопроса?

2. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 20 руб. каждая, 3 книги - по 40 руб. и 7 книг - по 10руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 50 руб.?

Вариант 8.

1. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов два выигрышных?

2. На шести одинаковых карточках написаны буквы “а”, ”в”, ”к”,”м”, ”о”, ”с” . Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово “Москва”?

Вариант 9.

1. В урне 100 шаров, помеченных номерами 1,2,3,…100. Из урны наугад выбирают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

2. Задания программированной контрольной работы пронумерованы всеми двухзначными числами. Какова вероятность того, что номер наугад выбранного задания состоит из одинаковых цифр?

Вариант 10.

1. В урне 6 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. Шесть карточек вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово “ призма”?

Вариант 11.

1. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Какова вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно 3 стандартных?

2. Четырехтомное собрание сочинений А.С. Пушкина расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

Вариант 12.

1. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Какова вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом?

2. Экзаменационные билеты пронумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета чётный?

Вариант 13.

1. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что два шара белые.

2. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 20 руб. каждая, 3 книги - по 40 руб. и 7 книг - по 10руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 30 руб.?

Вариант 14.

1. В урне 8 красных и 5 синих шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они разного цвета.

2. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет четное число очков?

Вариант 15.

1. Десять различных книг расставляют наугад на одной полке. Найдите вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2. В партии из 12 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 6 стандартных?

Вопросы самоконтроля:

1. Что называется вероятностью события?

2. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.

3. Приведите примеры совместных и несовместных, независимых событий;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 23

РАСЧЕТ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Цель:

- сформировать навыки расчёта числовых характеристик случайной величины;
- развить умения обработки статистических данных;
- закрепить знания о характеристиках случайной величины.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации, обработки и использования информации для получения научно обоснованных выводов и принятия верных решений. Важным этапом обработки статистических данных является подбор статистического распределения и вычисление числовых характеристик случайной величины, указывающих её среднее значение в результате проводимых испытаний или наблюдений.

Пример 1. Из генеральной совокупности произведена выборка. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

Таблица 1 – Выборочная совокупность

x_i	1	2	5	8
n_i	10	15	20	25

Найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Выборочная средняя $\overline{x_в}$ вычисляется по формуле:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{к} x_i n_i = \frac{1\cdot 10 + 2\cdot 15 + 5\cdot 20 + 8\cdot 25}{70} = \frac{340}{70} \approx 4,86$$

Находим выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{к} n_i\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 = \frac{10\cdot(1-4,86)^2 + 15\cdot(2-4,86)^2 + 20\cdot(5-4,86)^2 + 25\cdot(8-4,86)^2}{70} \approx$$

$$\approx \frac{519}{70} \approx 7,41$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx \sqrt{7,41} \approx 2,72$$

Находим оценки генеральных характеристик.

Улучшенная дисперсия (несмещенная оценка дисперсии):

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{70}{70-1} \cdot 7,41 \approx 7,52$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{7,52} \approx 2,74$$

Задания для самостоятельного выполнения:

По заданному закону распределения найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и дать оценку параметрам генеральной совокупности.

Вариант 1.

x_i	1	3	5	9
n_i	10	15	20	25

Вариант 2.

x_i	1	2	3	4
n_i	15	20	23	25

Вариант 3.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	20	25	30

Вариант 4.

x_i	3	4	5	8
n_i	10	15	20	25

Вариант 5.

x_i	1	4	5	6
n_i	15	20	25	25

Вариант 6.

x_i	2	3	5	8
n_i	15	20	25	30

Вариант 7.

x_i	2	4	5	9
n_i	10	15	20	25

Вариант 8.

x_i	4	5	6	7
n_i	15	25	25	30

Вариант 9.

x_i	1	3	6	8
n_i	10	15	25	30

Вариант 10.

x_i	3	5	8	10
n_i	10	15	20	25

Вариант 11.

x_i	2	4	6	8
n_i	15	15	25	25

Вариант 12.

x_i	1	2	5	8
n_i	5	10	15	20

Вариант 13.

x_i	4	6	8	10
n_i	10	15	25	30

Вариант 14.

x_i	2	3	6	8
n_i	10	20	25	30

Вариант 15.

x_i	3	7	9	10
n_i	5	15	25	35

Вопросы самоконтроля:

1. Что такое генеральная и выборочная совокупности?
2. Дайте определение статистическому распределению выборки.
3. Запишите формулы вычисления математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.
4. Дайте определение среднего квадратического отклонения случайной величины.
5. Как производятся расчёты оценок генеральных характеристик?

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валуцэ И.И. Математика для техникумов. - М.: Наука, 1990.– 432 с.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 1990. – 495 с.
3. Яковлев Г.Н. Алегбра и начала анализа. – М.: Наука, 1987. – 663 с.
4. Апанасов П.Т., Орлов М.И. Сборник задач по математике. – М.: Высшая школа, 1987. – 303 с.
5. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. – М.: Высшая школа, 1991. – 480 с.
6. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. –М.: Высшая школа, 1996. – 415 с.
7. Горбатов В.А. Дискретная математика. – М.: Высшая школа, 2006. – 367 с.
8. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – Изд.: Наука, 1977. – 324 с.
9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2007. – 479 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических занятий для студентов 2 курса очной формы обучения образовательных учреждений среднего профессионального образования специальностей 21.02.02 Бурение нефтяных и газовых скважин 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений

Часть II

Методические указания к практическим занятиям разработал:
преподаватель Карсакова Елена Николаевна

Подписано к печати ***28.05.2015 г.*** Объем ***3*** п.л.
Формат 60х84/16 Заказ
Тираж ***160 экз.***

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Югорский государственный университет»
НИЖНЕВАРТОВСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Югорский государственный университет»
628615 Тюменская обл., Ханты-Мансийский автономный округ,
г. Нижневартовск, ул. Мира, 37.