МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Югорский государственный университет»
НИЖНЕВАРТОВСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Югорский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

**Методические указания к практическим занятиям
для студентов 2 курса очной формы обучения
образовательных учреждений
среднего профессионального образования специальностей
131003.51 Бурение нефтяных и газовых скважин,
131018.51 Разработка нефтяных и газовых месторождений**

Часть I

Нижневартовск 2014

ББК 22.1
М-33

РАССМОТРЕНО	**УТВЕРЖДАЮ**
На заседании кафедры Е и ЭД	Председатель методического совета
Протокол № 2 от 24.02.2014г.	ННТ (филиал) ФГБОУ ВПО «ЮГУ»
Зав. кафедрой	____________ Т. А. Дмитриева
____________Л. В. Рвачева	« 27 » февраля 2014г.

Соответствует:

1. Федеральному государственному образовательному стандарту по специальностям 131003.51 Бурение нефтяных и газовых скважин, 131018.51 Разработка нефтяных и газовых месторождений, утв. 17.03.2010;
2. Рабочей программе учебной дисциплины «Математика» (ЕН. 01) по специальностям 131003.51 Бурение нефтяных и газовых скважин, 131018.51 Разработка нефтяных и газовых месторождений, утв. 07.09.2011.

Разработчик:
Карсакова Елена Николаевна, преподаватель высшей квалификационной категории Нижневартовского нефтяного техникума (филиала) ФГБОУ ВПО «ЮГУ».

Рецензенты:

1. Суханова Т.Г., преподаватель высшей квалификационной категории Нижневартовский нефтяной техникум (филиала) ФГБОУ ВПО «ЮГУ».
2. Самарина Е.Ф., кандидат педагогических наук, доцент ТюмГНГУ.

Замечания, предложения и пожелания направлять в Нижневартовский нефтяной техникум (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Югорский государственный университет» по адресу: 628615, Тюменская обл., Ханты-Мансийский автономный округ, г. Нижневартовск, ул. Мира, 37.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом по специальностям среднего профессионального образования 131003.51 Бурение нефтяных и газовых скважин, 131018.51 Разработка нефтяных и газовых месторождений и рабочей программой учебной дисциплины «Математика» (ЕН. 01), предназначенной для реализации государственных требований к уровню подготовки выпускников.

Комплекс практических занятий является вспомогательным инструментом при формировании общей системы знаний на основе использования математических идей и методов в профессиональной деятельности; практического применения приобретенных знаний и умений при выполнении исследовательских и практических работ.

Практические занятия учебной дисциплины «Математика» ориентированы на развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, необходимой для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла.

Пособие содержит требования к выполнению и оформлению практических занятий, тематический перечень работ, методические указания к выполнению практической части, варианты заданий, вопросы для самоконтроля, список основной и дополнительной литературы.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Все работы выполняются в тетради для практических занятий.
2. Работы оформляют чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, внимательно изучите методические указания к работе.
5. Уделите внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение сопроводите краткими пояснениями, указав используемые формулы.
7. Геометрические построения следует выполнять карандашом с помощью чертёжных инструментов.
8. Задания к практическим занятиям имеют 15 вариантов.
9. Каждый студент выполняет свой вариант.

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Номер раздела	Номер и тема занятия	Количество аудиторных часов
1	**2**	**3**
1	Практическое занятие № 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме	2
1	Практическое занятие № 2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме	2
1	Практическое занятие № 3. Действия над комплексными числами в показательной форме	2
2	Практическое занятие № 4. Вычисление определителей второго порядка	2
2	Практическое занятие № 5. Вычисление определителей третьего порядка	2
2	Практическое занятие № 6. Решение системы 3 линейных уравнений с 3 переменными	2
3	Практическое занятие № 7. Вычисление пределов функции в заданной точке	2
3	Практическое занятие № 8. Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел	2
3	Практическое занятие № 9. Первый и второй замечательные пределы	2
4	Практическое занятие № 10. Правила дифференцирования функций	2
4	Практическое занятие № 11. Производные тригонометрических функций	2
4	Практическое занятие № 12. Производные логарифмических и показательных функций	2
4	Практическое занятие № 13. Исследование функции и построение графика	2
5	Практическое занятие № 14. Методы нахождения неопределённых интегралов	2
5	Практическое занятие № 15. Приложения неопределённого интеграла к решению задач	2
5	Практическое занятие № 16. Определённый интеграл и его свойства	2
5	Практическое занятие № 17. Приложения определённого интеграла к решению задач	2
5	Практическое занятие № 18. Приближённые вычисления определённого интеграла	2
6	Практическое занятие № 19. Отношения множеств	2
6	Практическое занятие № 20. Операции над множествами	2
6	Практическое занятие № 21. Элементы комбинаторики	2
7	Практическое занятие № 22. Элементы теории вероятностей	2
7	Практическое занятие № 23. Расчет числовых характеристик случайной величины	2
	ИТОГО:	**46**

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Цель:

- сформировать умения выполнения действий над комплексными числами в алгебраической форме;
- развить навыки преобразования мнимой единицы;
- закрепить знания о свойствах степени.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, плакат свойства степени.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме производится по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример 1. Выполнить сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел:

Решение:

1. Сложение комплексных чисел: $z_1 = 4 + 2i, \quad z_2 = 1 + 5i.$

По правилу сложения комплексных чисел получим:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (4 + 2i) + (1 + 5i) = (4 + 1) + (2 + 5)i = 5 + 7i.$$

2. Вычитание комплексных чисел: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 6 + 3i.$

По правилу вычитания комплексных чисел получим:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = (3 - 6) + (5 - 3)i = -3 + 2i.$$

3. Умножение комплексных чисел: $z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = 3 + 2i.$

По правилу умножения комплексных чисел получим:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (5 - 4i)(3 + 2i) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2i - 4i \cdot 3 - 4i \cdot 2i =$$

$$= 15 + 10i - 12i - 8i^2 = 15 - 2i - 8(-1) = 23 - 2i.$$

4. Деление комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 4 + 5i.$

Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{16-25i^2}=\frac{8-22i+15(-1)}{16-25(-1)}=$$
$$=\frac{-7-22i}{41}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i;$$

Пример 2. Вычислить: i^{15}, $(1+i)^8$

Решение:

1. Так как $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i$, получим:

$$i^{15}=\left(i^2\right)^7\cdot i=(-1)^7\cdot i=-1\cdot i=-i.$$

2. Используя соотношение $(1+i)^2=2i$, получим:

$$(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=(2i)^4=16i^4=16\left(i^2\right)^2=16(-1)^2=16.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Выполните сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

II. Возведите в степень.

Вариант 1.

1. а) $(3+i)+(-3-8i)$; в) $(5+4i)(1+2i)$;
   б) $(4+5i)-(-2+3i)$; г) $\frac{3-i}{3+i}$.
2. а) i^7; б) $(1+i)^{15}$; в) $i+i^2+i^6+i^8+i^{10}$.

Вариант 2.

1. а) $(5-4i)+(7+4i)$; в) $(8-2i)(8+2i)$;
   б) $(3+9i)-(1+3i)$; г) $\frac{1-i}{i-2}$.
2. а) i^{23}; б) $(1+i)^{19}$; в) $i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}$.

Вариант 3.

1. а) $(3+2i)+(5+3i)$; в) $(5-3i)(5+3i)$;
   б) $(4+3i)-(2+i)$; г) $\frac{4i+1}{3-i}$.
2. а) i^{25}; б) $(1+i)^5$; в) $i+i^3+i^5+i^7+i^9$.

Вариант 4.

1. а) $(7+i)+(7+3i)$; в) $(6+2i)(6-2i)$;
   б) $(0,2+4i)-(0,8+2i)$; г) $\frac{5+i}{5-2i}$.
2. а) i^{21}; б) $(1+i)^{14}$; в) $i^7+i^8+i^9+i^{10}+i^{11}$.

Вариант 5.

1. а) $(15+i)+(8+2i)$; в) $(3+4i)(3-4i)$;

   б) $(1-i)-(7-3i)$; г) $\dfrac{6-3i}{8+4i}$.

2. а) i^{18}; б) $(1+i)^4$; в) $i+i^4+i^7+i^9+i^{11}$.

Вариант 6.

1. а) $(-2-i)+(1+i)$; в) $(8+i)(8-i)$;

   б) $(2+i)-(6-2i)$; г) $\dfrac{2i-1}{7+3i}$.

2. а) i^{27}; б) $(1+i)^{22}$; в) $i^2+i^4+i^8+i^9+i^{10}$.

Вариант 7.

1. а) $(12-i)+(3-5i)$; в) $(3+i)(3-i)$;

   б) $(5+6i)-(-3-4i)$; г) $\dfrac{-8-7i}{1+3i}$.

2. а) i^{16}; б) $(1+i)^{16}$; в) $i^5+i^6+i^9+i^{10}+i^{12}$.

Вариант 8.

1. а) $(15+2i)+(9+3i)$; в) $(10+2i)(10-i)$;

   б) $(1+7i)-(3-i)$; г) $\dfrac{5+12i}{8-6i}$.

2. а) i^8; б) $(1+i)^{13}$; в) $i+i^2+i^6+i^7+i^8$.

Вариант 9.

1. а) $(4+11i)+(7+9i)$; в) $(-1+6i)(6-i)$;

   б) $(-7+2i)-(5-i)$; г) $\dfrac{3+3i}{4-3i}$.

2. а) i^{13}; б) $(1+i)^9$; в) $i^4+i^5+i^9+i^{12}+i^{15}$.

Вариант 10.

1. а) $(-6+2i)+(-6-2i)$; в) $(7+2i)(7-2i)$;

   б) $(7-3i)-(2+4i)$; г) $\dfrac{2+9i}{3i-1}$.

2. а) i^{12}; б) $(1+i)^{18}$; в) $i^6+i^8+i^{10}+i^{12}+i^{14}$.

Вариант 11.

1. а) $(0{,}2+0{,}1i)+(0{,}8-1{,}1i)$; в) $(9-4i)(9+4i)$;

   б) $(21+3i)-(6+i)$; г) $\dfrac{2-3i}{4+5i}$.

2. а) i^{17}; б) $(1+i)^{12}$; в) $i^2+i^3+i^5+i^6+i^{10}$.

Вариант 12.

1. а) $(-8-7i)+(4-3i)$; в) $(1-i)(1+i)$;

б) $(4+11i)-(7+9i)$; г) $\frac{1+7i}{2+3i}$.

2. а) i^{15}; б) $(1+i)^{10}$; в) $i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.

Вариант 13.

1. а) $(12-i)+(5+14i)$; в) $(3+2i)(2-i)$;

б) $(0{,}5-3{,}2i)-(1{,}5-0{,}8i)$; г) $\frac{2+9i}{7+8i}$.

2. а) i^{26}; б) $(1+i)^{11}$; в) $i^3+i^5+i^7+i^{11}+i^{13}$.

Вариант 14.

1. а) $(4+2i)+(-4+4i)$; в) $(6-3i)(5-2i)$;

б) $(0{,}2-0{,}3i)-(0{,}5+0{,}4i)$; г) $\frac{2-2i}{5-2i}$.

2. а) i^{19}; б) $(1+i)^{21}$; в) $i^2+i^4+i^8+i^{10}+i^{16}$.

Вариант 15.

1. а) $(5+5i)+(15-8i)$; в) $(1-9i)(1+9i)$;

б) $(6+12i)-(9+4i)$; г) $\frac{-3-4i}{2+2i}$.

2. а) i^{22}; б) $(1+i)^{24}$; в) $i+i^3+i^6+i^9+i^{13}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение равным, противоположным, сопряженным, мнимым комплексным числам.
2. Запишите алгебраическую форму комплексного числа.
3. Как выполняются действия над комплексными числами в алгебраической форме?
4. Правило вычисления натуральных степеней мнимой единицы?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Цель:

- сформировать навыки вычисления модуля и аргумента комплексного числа;
- развить умения выполнения действий над комплексными числами в тригонометрической форме;
- закрепить навыки преобразований комплексных чисел из алгебраической формы в тригонометрическую и наоборот.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, таблица значений тригонометрических функций.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Для выполнения действий умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня n-ой степени над комплексными числами в тригонометрической форме необходимо знание соответствующих формул.

Пример 1. Выполнить умножение комплексных чисел $z_1 = 2\cos(\pi/6 + i\sin\pi/6)$, $z_2 = 3(\cos\pi/12 + i\sin\pi/12)$ в тригонометрической форме.

Решение:

Найдем произведение двух комплексных чисел по заданной формуле:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] = 2 \cdot 3\left[\cos(\pi/6 + \pi/12) + i\sin(\pi/6 + \pi/12)\right] =$$
$$= 6\left[cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right] = 6\left[\left(\sqrt{2}/2\right) + i\left(\sqrt{2}/2\right)\right] = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i.$$

Пример 2. Выполнить деление комплексных чисел $z_1 = 3(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$, $z_2 = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$ в тригонометрической форме.

Решение:

Выполним деление двух комплексных чисел по заданной формуле:

$$z_1/z_2 = r_1/r_2\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = 3/2\left[\cos\left(330^0 - 60^0\right) + i\sin\left(330^0 - 60^0\right)\right] =$$
$$= 1{,}5\left(\cos 270^0 + i\sin 270^0\right) = 1{,}5(0 + i(-1)) = -1{,}5i.$$

Пример 3. Возвести в степень: $z^6 = [\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]^6$.

Решение:

По формуле Муавра получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = [\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]^6 = \cos(6 \cdot (\pi/6) + i\sin(6 \cdot (\pi/6))) =$$
$$= cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Пример 4. Найти значение корня из комплексного числа $z = \sqrt{i}$.

Решение:

Во-первых, представим число i в тригонометрической форме: $i = 0 + 1 \cdot i; \grave{a} = 0; \mathrm{b} = 1;$ Находим модуль по формуле $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Точка, изображающая число z, лежит в I четверти, тогда, $\cos\varphi = a / r = 0/1 = 0, \sin\varphi = b/r = 1/1 = 1.$ Определим по таблице значений тригонометрических функций главное значение аргумента: $\varphi = \pi/2$. Поэтому, тригонометрическая форма числа $z = i$ примет вид:

$$i = 0 + 1 \cdot i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2).$$

Теперь найдём значение корня по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0; 1; 2; \ldots, n-1.$$

Находим:

$$z_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)} = cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} =$$

$$= \cos(\pi/4 + \pi k) + i\sin(\pi/4 + \pi k), \quad k = 0; 1.$$

если $k = 0,$ то $z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i(\sqrt{2}/2);$

если $k = 1,$ то $z_1 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/2)\, i.$

Пример 5. Преобразуйте алгебраическую форму комплексного числа $z = 2 - 2i$ в тригонометрическую.

Решение:

Для перевода комплексного числа $z = a + bi$ из алгебраической формы в тригонометрическую необходимо найти его модуль и главное значение аргумента. Здесь $a = 2,\ b = -2.$ Находим модуль по формуле $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Точка, изображающая число z, лежит в IV четверти, тогда $\cos\varphi = a/r = 2/2\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, $\sin\varphi = b/r = -2/2/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$.Определим по таблице значений тригонометрических функций главное значение аргумента:$\varphi = 7\pi/4$. Поэтому, тригонометрическая форма числа $z = 2 - 2i$ примет вид:

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}[\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)].$$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Выполните умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

II. Выполните деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

III. Возведите в степень.

IV. Представьте число в тригонометрической форме и найдите значение корня.

V. Преобразуйте алгебраическую форму комплексного числа в тригонометрическую.

Вариант 1.

1. $4\left(\cos 10^0 + i\sin 10^0\right)\cdot 2\left(\cos 35^0 + i\sin 35^0\right).$
2. $3[\cos(3П/4) + i\sin(3П/4)] : [\cos(П/2) + i\sin(П/2)];$
3. $[2(\cos(П/8) + i\sin(П/8)]^8.$
4. $\sqrt[6]{1}.$
5. $-3+3i.$

Вариант 2.

1. $3[\cos(П/8) + i\sin(П/8)]\cdot[\cos(5П/24) + i\sin(5П/24)];$
2. $\left(\cos 210^0 + i\sin 210^0\right) : \left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right).$
3. $[3(\cos(П/3) + i\sin(П3)]^2.$
4. $\sqrt[3]{-1}.$
5. $-1+i.$

Вариант 3.

1. $2[\cos(П/3) + i\sin(П/3)]\cdot 5[\cos(-П/4) + i\sin(-П/4)];$
2. $\left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right) : \left(\cos(-120^0) + i\sin(-120^0)\right).$
3. $\left[2(\cos 35^0 + i\sin 35^0\right]^{-12}.$
4. $\sqrt[4]{4}.$
5. $\sqrt{3}-i.$

Вариант 4.

1. $3[\cos(-5П/4) + i\sin(-5П/4)] : [\cos(-П/2) + i\sin(-П/2)];$
2. $2\left(\cos 130^0 + i\sin 130^0\right)\cdot 4\left(\cos 140^0 + i\sin 140^0\right).$
3. $[3(\cos(П/2) + i\sin(П/2)]^4.$
4. $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}.$
5. $3i.$

Вариант 5.

1. $[\cos(2П/3) + i\sin(2П/3)]\cdot 5[\cos(-П/2) + i\sin(-П/2)];$
2. $6\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right) : 2\left(\cos(-50^0) + i\sin(-50^0)\right).$
3. $[(\cos(П/24) + i\sin(П/24)]^8.$
4. $\sqrt[3]{i}.$
5. $3-3i.$

Вариант 6.

1. $[\cos(-П/3) + i\sin(-П/3)] : 4[\cos(-П/6) + i\sin(-П/6)];$
2. $5\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right)\cdot 4\left(\cos 80^0 + i\sin 80^0\right).$
3. $\left[3(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right]^3.$
4. $\sqrt[4]{-1}.$

5. $\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$

Вариант 7.

1. $4[\cos(5\Pi/6)+i\sin(5\Pi/6)]\cdot 3[\cos(2\Pi/3)+i\sin(2\Pi/3)];$
2. $7(\cos 150^0+i\sin 150^0):21(\cos 120^0+i\sin 120^0).$
3. $[2(\cos 45^0+i\sin 45^0)]^5.$
4. $\sqrt{9}.$
5. $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$

Вариант 8.

1. $28[\cos(-\Pi/3)+i\sin(-\Pi/3)]:2[\cos(-\Pi/6)+i\sin(-\Pi/6)];$
2. $8(\cos 15^0+i\sin 15^0)\cdot 3(\cos 30^0+i\sin 30^0).$
3. $[(\cos(\Pi/24)+i\sin(\Pi/24)]^{12}.$
4. $\sqrt[4]{-16}.$
5. $4-4i.$

Вариант 9.

1. $3[\cos(\Pi/4)+i\sin(\Pi/4)]\cdot 3[\cos(\Pi/12)+i\sin(\Pi/12)];$
2. $8(\cos 30^0+i\sin 30^0):2(\cos 90^0+i\sin 90^0).$
3. $[4(\cos(\Pi/6)+i\sin(\Pi/6))]^{-3}.$
4. $\sqrt[3]{1}.$
5. $-5+5i.$

Вариант 10.

1. $4[\cos(5\Pi/12)+i\sin(5\Pi/12)]:[\cos(\Pi/12)+i\sin(\Pi/12)];$
2. $0{,}8(\cos 289^0+i\sin 289^0)\cdot 5(\cos 101^0+i\sin 101^0).$
3. $[2(\cos 36^0+i\sin 36^0)]^5.$
4. $\sqrt[3]{-8}.$
5. $-2.$

Вариант 11.

1. $5[\cos(\Pi/6)+i\sin(\Pi/6)]\cdot 2[\cos\Pi+i\sin\Pi];$
2. $5(\cos 100^0+i\sin 100^0):3(\cos 40^0+i\sin 40^0).$
3. $[(\cos(-\Pi/3)+i\sin(-\Pi/3)]^{-6}.$
4. $\sqrt[3]{64}.$
5. $-4-4i.$

Вариант 12.

1. $10[\cos(3\Pi/4)+i\sin(3\Pi/4)]:5[\cos(\Pi/3)+i\sin(\Pi/3)];$
2. $0{,}5(\cos 17^0+i\sin 17^0)\cdot 4(\cos 13^0+i\sin 13^0).$
3. $[2(\cos 60^0+i\sin 60^0)]^4.$

4. $\sqrt[3]{-27}.$
5. $6i.$

Вариант 13.

1. $0{,}6[\cos(5\Pi/4)+i\sin(5\Pi/4)]\cdot 0{,}2[\cos(-2\Pi)+i\sin(-2\Pi)];$
2. $24(\cos 75^0+i\sin 75^0):3(\cos 30^0+i\sin 30^0).$
3. $[3(\cos(5\Pi/4)+i\sin(5\Pi/4)]^5.$
4. $\sqrt[5]{1}.$
5. $-3-3i.$

Вариант 14.

1. $9[\cos(5\Pi/3)+i\sin(5\Pi/3)]:6[\cos(\Pi/6)+i\sin(\Pi/6)];$
2. $7/2(\cos 95^0+i\sin 95^0)\cdot 2(\cos(-65^0)+i\sin(-65^0)).$
3. $[\cos 15^0+i\sin 15^0]^{20}.$
4. $\sqrt{-16}.$
5. $5+5i.$

Вариант 15.

1. $4[\cos(-\Pi/3)+i\sin(-\Pi/3)]\cdot 8[\cos(\Pi/6)+i\sin(\Pi/6)];$
2. $3(\cos 225^0+i\sin 225^0):5(\cos 45^0+i\sin 45^0).$
3. $[10(\cos(\Pi/3)+i\sin(\Pi/3)]^3.$
4. $\sqrt[3]{8i}.$
5. $-2i.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют модулем и аргументом комплексного числа?
2. Как представить комплексное число в тригонометрической форме?
3. Правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
4. Запишите формулу Муавра.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ

Цель:

- сформировать умения выполнения действий над комплексными числами в показательной форме;
- развить навыки преобразований комплексных чисел из алгебраической формы в показательную и наоборот;
- закрепить знания о свойствах тригонометрических функций.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, таблица значений тригонометрических функций.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Для представления комплексного числа $z = a + bi$ в показательной форме необходимо найти его модуль и главное значение аргумента.

Пример 1. Представить в показательной форме число $z = 2i.$

Решение:

Здесь $a = 0, b = 2$. Находим модуль по формуле $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Точка, изображающая число z, лежит в I четверти, тогда $\cos\varphi = a / r = 0/2 = 0,\ \sin\varphi = b/r = 2/2 = 1$. Определим по таблице значений тригонометрических функций главное значение аргумента: $\varphi = \pi/2$. Поэтому, показательная форма числа $z = 2i$ согласно формуле $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ примет вид:

$$z = 2e^{i\pi/2}.$$

Пример 2. Возвести в степень $z^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\Pi}{4}i}\right)^6$ в показательной форме.

Решение:

Для возведения в степень числа $z = \sqrt{2}e^{\frac{\Pi}{4}i}$ используем формулу $z^n = \left(r \cdot e^{\varphi \cdot i}\right)^n$. Получим: $z^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\Pi}{4}i}\right)^6 = 8e^{\frac{3}{2}\cdot\pi\cdot i}$.

Пример 3. Извлечь корень из числа: $z = \sqrt{2}e^{\frac{\Pi}{4}i}$.

Решение:

По формуле получим:

$$z_n = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{\varphi i}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi + 2\Pi k}{n}i} = \sqrt{\sqrt{2}e^{i\Pi/4}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\Pi/4 + 2\Pi k}{2}i}$$

если $k = 0,$ то $z_o = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\Pi/4 + 2\Pi 0}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\Pi}{8}i},$

если $k = 1,$ то $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\Pi/4 + 2\Pi 1}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{9\Pi}{8}i}.$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Представьте комплексное число в показательной форме.

II. Переведите комплексное число из тригонометрической формы в показательную и возведите в степень.

III. Найдите значение корня в показательной форме.

Вариант 1.

1. $4-4i.$ 2. $\left[10(\cos(\Pi/3)+i\sin(\Pi/3)\right]^3.$ 3. $\sqrt[3]{8i}.$

Вариант 2.

1. $5+5i.$ 2. $\left[\cos 15^0+i\sin 15^0\right]^{20}.$ 3. $\sqrt{-16}.$

Вариант 3.

1. $3-3i.$ 2. $\left[3(\cos(5\Pi/4)+i\sin(5\Pi/4)\right]^5.$ 3. $\sqrt[5]{1}.$

Вариант 4.

1. $6i.$ 2. $\left[2(\cos 60^0+i\sin 60^0)\right]^4.$ 3. $\sqrt[3]{-27}.$

Вариант 5.

1. $-4-4i.$ 2. $\left[(\cos(-\Pi/3)+i\sin(-\Pi/3)\right]^{-6}.$ 3. $\sqrt[3]{64}.$

Вариант 6.

1. $-2.$ 2. $\left[2(\cos 36^0+i\sin 36^0)\right]^5.$ 3. $\sqrt[3]{-8}.$

Вариант 7.

1. $-3+3i.$ 2. $\left[4(\cos(\Pi/6)+i\sin(\Pi/6))\right]^{-3}.$ 3. $\sqrt[3]{1}.$

Вариант 8.

1. $3i.$ 2. $\left[3(\cos(\Pi/2)+i\sin(\Pi/2)\right]^4.$ 3. $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}.$

Вариант 9.

1. $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$ 2. $\left[2(\cos 45^0+i\sin 45^0)\right]^5.$ 3. $\sqrt{9}.$

Вариант 10.

1. $2-2i.$ 2. $\left[3(\cos 20^0+i\sin 20^0\right]^3.$ 3. $\sqrt[4]{-1}.$

Вариант 11.

1. $-3-3i.$ 2. $\left[(\cos(\Pi/24)+i\sin(\Pi/24)\right]^8.$ 3. $\sqrt[3]{i}.$

Вариант 12.

1. $4+4i.$ 2. $\left[(\cos(\Pi/24)+i\sin(\Pi/24)\right]^{12}.$ 3. $\sqrt[4]{-16}.$

Вариант 13.

1. $\sqrt{3}-i.$ 2. $\left[2(\cos 35^0+i\sin 35^0\right]^{-12}.$ 3. $\sqrt[4]{4}.$

Вариант 14.

1. $-1+i.$ 2. $\left[3(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right]^2.$ 3. $\sqrt[3]{-1}.$

Вариант 15.

1. $-\sqrt{3}+i.$ 2. $\left[2(\cos(\Pi/8)+i\sin(\Pi/8)\right]^8.$ 3. $\sqrt[6]{1}.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какую функцию называют функцией Эйлера?
2. Запишите показательную форму комплексного числа.
3. Как выполняются действия над комплексными числами в показательной форме?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель:

- сформировать навыки вычисления определителей 2-го порядка;
- развить умение нахождения решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом Крамера;
- закрепить знания о способах решения уравнений с одной и двумя переменными.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Определителем матрицы 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется число

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

Определитель матрицы 2-го порядка находят по правилу: произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали. Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол. Побочной диагональю называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Пример 1. Вычислить определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение:

Найдём значение определителя по правилу: произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot 1 = -10 - 4 = -14.$$

Пример 2. Найти решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ 4x - y = 14. \end{cases}$$

Решение:

Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

единственное решение по правилу Крамера находят следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

По формулам Крамера получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = -11$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-1) - 14 \cdot 2 = -44$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 - 4 \cdot 16 = -22$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-11} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2.$$

Ответ: (4;2)

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Вычислить определитель второго порядка.

II. Найти корни уравнения.

III. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера.

Вариант 1.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1+x & 4 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x + 5y = 19. \end{cases}$

Вариант 2.

1. $\begin{vmatrix} 8 & x-1 \\ 3 & 4x \end{vmatrix}$; 2. $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 3x + 5y = 14, \\ 2x - 4y = -20. \end{cases}$

Вариант 3.

1. $\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 5x - 2y = 14, \\ 3x + 4y = 25. \end{cases}$

Вариант 4.

1. $\begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ -4 & x \end{vmatrix} = 36$; 3. $\begin{cases} 4x+3y=-27, \\ 2x-4y=14. \end{cases}$

Вариант 5.

1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 8x+4y=7, \\ 4x+2y=9. \end{cases}$

Вариант 6.

1. $\begin{vmatrix} 1/2 & 2 \\ x+1 & 4 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 - \begin{vmatrix} 11x & 6 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 2x-3y=2, \\ 4x-6y=3. \end{cases}$

Вариант 7.

1. $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}$; 2. $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 11 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 5x-2y=7, \\ 3x+4y=25. \end{cases}$

Вариант 8.

1. $\begin{vmatrix} 8+x & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ -6x+9y=9. \end{cases}$

Вариант 9.

1. $\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ x-1 & 9 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} x & 2x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 32$; 3. $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 5x-y=7. \end{cases}$

Вариант 10.

1. $\begin{vmatrix} 6x & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 4x+y=14. \end{cases}$

Вариант 11.

1. $\begin{vmatrix} a-1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 - \begin{vmatrix} 2x & -9 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81. \end{cases}$

Вариант 12.

1. $\begin{vmatrix} 4 & a-2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 - \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 4x+y=17, \\ 3x-5y=7. \end{cases}$

Вариант 13.

1. $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & a-6 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 5x-3y=16, \\ 2x+4y=22. \end{cases}$

Вариант 14.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ a-2 & 4 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & 3{,}5x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 15$; 3. $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ 7x-5y=4. \end{cases}$

Вариант 15.

1. $\begin{vmatrix} 6 & -7a \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 6x-4y=2. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют определителем второго порядка?

2. Сформулируйте правило вычисления определителя второго порядка.

3. Запишите формулы Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Цель:

- сформировать навыки вычисления определителей 3-го порядка методом разложения по элементам первой строки и по правилу треугольников;
- развить умение преобразования определителя по его свойствам;
- закрепить знания о действиях с числами противоположных знаков.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

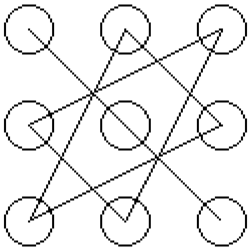
Краткие теоретические сведения:

Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое равенством:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из шести слагаемых. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Каждое слагаемое состоит из произведения трех сомножителей.



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

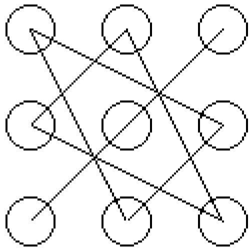


Рисунок 1.1 Рисунок 1.2

Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу нахождения определителя третьего порядка можно определить, пользуясь приведенной схемой, которая называется правилом треугольников или правилом Сарруса. Первые три слагаемые берутся со знаком плюс и определяются из рисунка (1.1.), а последующие три слагаемые берутся со знаком минус и определяются из рисунка (1.2).

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка по правилу Сарруса:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\Delta = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка методом разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

Решение:

Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3(-5 + 16) - 2(1+32) +$$

$$+ 2(2 + 20) = 33 - 66 + 44 = 11.$$

Рассмотрим основные свойства определителей:

- Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.
- Если у матрицы умножить любую строку (любой столбец) на какое-либо число, то определитель матрицы умножится на это число.
- Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
- Определитель меняет знак при перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы.
- Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
- Определитель не меняется, если к какой-нибудь строке прибавить любую другую строку, умноженную на любое число. Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найдите значение определителя по правилу треугольников (правило Сарруса).

II. Разложите определитель по элементам первой строки и вычислите его.

III. Используя свойства определителя, докажите равенство.

Вариант 1.

1. $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5x & -2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 2.

1. $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -7 \\ 2 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 3.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 3x & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 3 & 21 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 21 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 4.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 15 & 18 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 5.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ x & -5 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 6.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -x & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 4 & 15 & 6 \\ 7 & -4 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 7.

1. $\begin{vmatrix} -x & 5 & 0 \\ 2 & -3x & 1 \\ 4x & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 8.

1. $\begin{vmatrix} x & 3 & 2x \\ 4 & 7 & 11 \\ 5x & 10 & 13 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 9.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 15 & 12 & 9 \\ 9 & 6 & 13 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 10.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 13 & 4 & 5 \\ 13 & 4 & 5 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 11.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -4 & -2x & 5 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 2 & 14 & 6 \\ 5 & -3 & -1 \\ 4 & 28 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 12.

1. $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 14 & 11 & 8 \\ 1 & -3 & -2 \\ 14 & 11 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 13.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 3x & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 13 & 2 & 17 \\ 2 & -4 & -5 \\ 26 & 4 & 34 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 14.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 19 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & -7 \\ 19 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 15.

1. $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5x & -2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 26 & 2 & 28 \\ 5 & 3 & -2 \\ 13 & 1 & 14 \end{vmatrix} = 0.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют определителем третьего порядка?
2. Сформулируйте правило треугольников для вычисления определителя третьего порядка.
3. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по элементам первой строки.
4. Назовите основные свойства определителя.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ 3 ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Цель:

- развить умение преобразования матриц;
- сформировать навыки решения системы 3 линейных уравнений с тремя переменными методами Крамера и Гаусса;
- закрепить знания о свойствах определителей 2 и 3 порядка.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется квадратная или прямоугольная таблица, заполненная числами. Эти числа называются элементами матрицы.

Элементы матрицы, расположенные по горизонталям, образуют строки матрицы. Элементы матрицы, расположенные по вертикалям, образуют столбцы матрицы.

Строки нумеруются слева направо, начиная с номера 1, столбцы нумеруются сверху вниз, начиная с номера 1.

Матрица A, имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей размера m на n и обозначается $A_{m \cdot n}$. Элемент $a_{i\,j}$ матрицы $A = \{a_{ij}\}$ стоит на пересечении i - ой строки и j- го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол. Побочной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

Каждую матрицу можно умножить на любое число, причем, если k – число, то $k \cdot A = \{k \cdot a_{ij}\}$.

Матрицы одного и того же размера $A_{m\cdot n}$ и $B_{m\cdot n}$ можно складывать, причем $A_{m\cdot n} + B_{m\cdot n} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$.

Операция сложения матриц обладает свойствами $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Матрицы $A_{m\cdot n}$ и $B_{n\cdot k}$ можно перемножать, причем $A_{m\cdot n}\, B_{n\cdot k} = C_{m\cdot k}$, где

$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}$.

Операция умножения матриц обладает свойствами $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$, $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

В общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Пример 1. Выполнив действия над матрицами, найдите матрицу

C= 2A-B, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим матрицу 2A размерности 3x3:

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу C = 2A-B размерности 3x3:

$$C = 2A - B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -4 \\ -7 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

Свойства матриц и определителей широко применяют при решении системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

где x_1, x_2, x_3 – переменные, a_{11}, a_{12},…, a_{33} - числовые коэффициенты. Следует помнить, что при решении системы возможен один из трёх вариантов ответа:

1) система имеет единственное решение – $(x_1; x_2; x_3)$;

2) система имеет бесконечно много решений (не определена);

3) система не имеет решений (несовместна).

Рассмотрим основные методы решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

а) Метод Крамера позволяет найти единственное решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, опираясь на умение вычислять определители третьего порядка,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример 2. Найти решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

Решение. Находим определители третьего порядка, используя правило Сарруса или разложение по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

Находим решение системы по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$

Ответ: (- 152; 270; -254)

б). Метод Гаусса - классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований (сложение, вычитание уравнений, умножение на коэффициенты) система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которого последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные переменные.

Пример 3.

Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+3x_2+x_3=8. \end{cases}$$

Во – первых, обнулим коэффициенты при x_1 во втором и третьем уравнениях. Для этого вычтем почленно из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на 2, и из третьего уравнения – первое, умноженное на 3. Имеем:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=6, \\ -3x_2+x_3=1, \\ -6x_2-2x_3=-10. \end{cases}$$

Во – вторых, обнулим коэффициент при x_2 в третьем уравнении. Для этого вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на 2. Получим легко решаемую систему треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=6, \\ -3x_2+x_3=1, \\ -4x_3=-12. \end{cases}$$

В самом деле, из третьего уравнения находим значение x_3 =3, подставляем его во второе уравнение и находим значение x_2 = ⅔. Решаем первое уравнение и находим x_1 =1.

Таким образом, исходная система решена.

Ответ: (1; ⅔; 3).

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти матрицу преобразования.

II. Решить систему методом Крамера.

III. Решить систему методом Гаусса.

Вариант 1.

1. $C=A+3B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1-x_2+x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+x_3=7. \end{cases}$

Вариант 2.

1. $C = 2A - B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-2,\\x_1+2x_2-x_3=7,\\2x_1+x_2-3x_3=5.\end{cases}$

Вариант 3.

1. $C = 3A + B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=4,\\x_1+4x_2-x_3=7,\\2x_1+x_2+x_3=3.\end{cases}$

Вариант 4.

1. $C = A - 4B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=3,\\x_1+3x_2+x_3=6,\\2x_1-x_2+x_3=4.\end{cases}$

Вариант 5.

1. $C = 4A - B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=2,\\x_1+2x_2+x_3=3,\\3x_1+7x_2+x_3=10.\end{cases}$

Вариант 6.

1. $C = A + 2B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\2x_1-x_2+x_3=1,\\2x_1+3x_2-x_3=1.\end{cases}$

Вариант 7.

1. $C = 2A + B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}10x_1+x_2+4x_3=1,\\x_1-2x_2-7x_3=-3,\\2x_1+x_2+5x_3=0.\end{cases}$

Вариант 8.

1. $C = 3A - B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=-3,\\x_1+2x_2-x_3=4,\\3x_1+x_2-3x_3=3.\end{cases}$

Вариант 9.

1. $C = A - 3B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}4x_1-x_2-5x_3=1,\\x_1+x_2-2x_3=6,\\3x_1-2x_2-6x_3=-2.\end{cases}$

Вариант 10.

1. $C = A - 2B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&1&8\\2&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=-3,\\5x_1+x_2-2x_3=11,\\x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$

Вариант 11.

1. $C = A+4B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 12.

1. $C = 4A+B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант 13.

1. $C = A+3B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

Вариант 14.

1. $C = 2A - B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$

Вариант 15.

1. $C = 3A + B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -7, \\ 9x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется матрицей?
2. Какие действия производятся над матрицами?
3. Назовите методы решения систем линейных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

Цель:

- сформировать навыки вычисления пределов в точке;
- развить умение раскрывать неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{1}{0}\right];\left[\frac{C}{0}\right];$
- закрепить знания о способах разложения многочлена на линейные множители.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Предельное значение функции в заданной точке — такая величина, к которой стремится рассматриваемая функция при стремлении её аргумента к данной точке.

Если такой предел существует, то говорят, что функция **сходится** к указанному значению; если такого предела не существует, то говорят, что функция **расходится**.

Отсутствие предела функции (в данной точке) означает, что для любого заранее заданного значения области значений и всякой его окрестности сколь угодно близко от заданной точки существуют точки, значение функции в которых окажется за пределами заданной окрестности.

Если в некоторой точке области определения функции существует предел и этот предел равен значению в данной функции, то функция оказывается **непрерывной** (в данной точке).

Определение 1: Пусть функция f (x) определена в некоторой окрестности точки *a*, кроме самой точки *a*. Число B называют пределом функции f(x) в точке *a*, если для любой последовательности значений аргументов x_1, x_2, x_3, …, x_n, стремящихся к *a*, последовательность соответствующих значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$, сходится к числу B.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, если $x_n \to a$ при $f(x_n) \to B$.

Для предела функции в точке справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то предел суммы функций f(x) и g(x) при x→a равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. Если f(x) и g(x) имеют пределы при x→a, то предел произведения функций при x→a равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to a} (C\cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

Теорема 3. Если функции f(x) и g(x) имеют пределы при x→a, причем предел функции $g(x) \neq 0$, то имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Рассмотрим вычисление пределов функций на конкретных примерах.

Пример 1. Найти предел в заданной точке:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8};$$

Решение:

При непосредственной подстановке x = 2 получим неопределенность вида [0/0]. Раскрыть эту неопределенность возможно, разложив числитель и знаменатель на линейные множители по формулам:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Далее сократим дробь на $x-2$ и найдём значение предела при x = 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{2+4}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти предел в заданной точке:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3};$$

Решение:

В данном случае пределы числителя и знаменателя при $x\to 6$ равны нулю, имеем неопределенность вида [0/0].

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{x+3}+3$ и, затем сократив дробь на $x-6$, получим:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x+3-9}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\sqrt{x+3}+3=\sqrt{6+3}+3=6.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти пределы функций в заданных точках.

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9};$ 2. $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\dfrac{5}{3x-9};$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x};$

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+x^2}{x^2+5x+6};$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7}{5x^2-3x};$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x+2}-2};$

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x+3x^2-1\right);$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3};$ 3. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6-x}{3-\sqrt{x+3}};$

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x+1\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$; 3. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$;

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x-4x^2\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$;

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9}{7x^2+3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{3x}$;

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{25-x^2}{5-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{5x^2-16x+3}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2-36}{x+6}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2-7x-4}$; 3. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2}$;

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{49-x^2}{7-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$;

Вариант 10.

1. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{x-8}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

Вариант 11.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+4x}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x/3}$;

Вариант 12.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

Вариант 13.

1. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{121x-x^3}{11-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

Вариант 14.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to -27}\dfrac{x+27}{\sqrt{x}+3}$;

Вариант 15.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2-7x-4}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{x+3}-3}$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите основные методы вычисления пределов в точке.

2. Сформулируйте теоремы о пределах.
3. Запишите формулу разложения квадратного трёхчлена.
4. Запишите формулы разности квадратов и разности кубов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Цель:

- сформировать навыки вычисления пределов на бесконечности;
- развить умение раскрывать неопределённости вида $[\infty/\infty];[1/\infty];[C/\infty]$;
- закрепить знания о способах деления многочлена на многочлен.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Предел функции на бесконечности описывает поведение значения данной функции, когда её аргумент становится бесконечно большим.

Определение 1: Число A называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$, можно найти такое $M > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A, \text{ если } x_n \to \infty \text{ при } f(x_n) \to A.$$

Справедливы аналогичные теоремы:

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to\infty} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to\infty} C = C$.

Определение 2: Функция называется бесконечно малой, если её предел при $x \to a$ равен нулю и бесконечно большой, если её предел при $x \to a$ равен бесконечности, т.е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то f(x) - бесконечно малая и если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то f(x) - бесконечно большая.

Свойства бесконечно малых:

- Сумма конечного числа бесконечно малых функций — бесконечно малая функция.
- Произведение бесконечно малых функций — бесконечно малая функция.
- Произведение бесконечно малой функции на ограниченную — бесконечно малая функция. Как следствие, произведение бесконечно малой функции на константу — бесконечно малая функция.
- Если *f(x)*— бесконечно малая функция, сохраняющая знак, то 1/*f(x)*— бесконечно большая функция.

Рассмотрим часто встречающиеся методы вычисления пределов функций на бесконечности.

Пример 1. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x}{5x}$;

Решение:

При $x\to\infty$ данная функция представляет собой частное двух бесконечно больших величин, имеем неопределенность вида $[\infty/\infty]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, применим первую предельную теорему и разделим каждое слагаемое числителя на 5*x*. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-x}{5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2}{5x}-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{5x}=2\lim_{x\to\infty}x-\frac{1}{5}=\infty.$$

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+1}{1+3x-x^3}$;

Решение:

При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида $[\infty/\infty]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{1+3x-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3/x^3-x^2/x^3+1/x^3}{1/x^3+3x/x^3-x^3/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x+1/x^3}{1/x^3+3/x^2-1}=$$

$$=\frac{2-1/\infty+1/\infty}{1/\infty+3/\infty-1}=\frac{2-0+0}{0+0-1}=-2.$$

Пример 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$;

Решение:

При $x\to\infty$ данная функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин, имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Раскроем неопределённость, умножив и разделив функцию на сопряжённое выражение $(x+\sqrt{x^2-4x})$, и при помощи элементарных преобразований получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x+x\sqrt{1-4/x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(1+\sqrt{1-4/x}\right)}=\frac{4}{2}=2.$$

Задание для самостоятельного выполнения:

I. Найти пределы функций на бесконечности.

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x}{8x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+1}{8x^3+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-9x})$;

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{5x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-8}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2-x}-7x)$;

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x+x^3}{10x^3+x^2-80}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$;

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3x}{6x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+11}{x^2-1+3x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+x}-5x)$;

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{-3x^3+x^2-26}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2-8x})$;

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{21x+12}{7x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-4}{x^2-7x-9}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2-x}-4x)$;

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-8x}{4x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3-x^2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x)$;

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11-3x}{9x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^2-5x+4}{20x-5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2+x}-6x)$;

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+3x}{15x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-5x})$;

Вариант 10.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x+5}{6x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+2x^2-3x^3}{1-3x+2x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$;

Вариант 11.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-5x}{3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-x^4+8x}{7x-8x^2+6x^6}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+7x}-3x)$;

Вариант 12.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-6x}{8x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x-1}{x^2+7x^3+11}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;

Вариант 13.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+9x}{13x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-\sqrt{16x^2-4x})$;

Вариант 14.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x+21}{3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2-x}-3x)$;

Вариант 15.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2-8x}{25x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+6}{3-5x^2+10x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите основные методы вычисления пределов на бесконечности.
2. Сформулируйте теоремы о пределах.
3. Какая функция является бесконечно малой, бесконечно большой?
4. Назовите свойства бесконечно малых.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Цель:

- сформировать навыки вычисления первого и второго замечательных пределов;
- развить умение преобразования выражения к заданному виду;
- закрепить знания о тригонометрических тождествах.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы; стенд «Основные тождества тригонометрии».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$ **– первый замечательный предел;**

При вычислении пределов выражений, содержащих показательные функции с основанием *e*, обычно используют равенства:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\ ;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$ **– второй замечательный предел;**

Число *e* – иррациональное, $e\approx 2{,}7182818\ldots\approx 2{,}718$.

При вычислении замечательных пределов для раскрытия неопределённости вида [0/0] нередко применяют принцип замены бесконечно малых функций эквивалентными. А именно:

$\sin x\sim x$ *при* $x\to 0$, $tg\ x\sim x$ *при* $x\to 0$.

Приведем примеры методов вычисления замечательных пределов.

Пример 1. Найти предел: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}$;

Решение:

Выполнив преобразования и используя формулу $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, находим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x\cdot 1/3}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x}\right]^{1/3}=e^{1/3}=\sqrt[3]{e}.$$

Пример 2. Найти предел: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$;

Решение: Выполнив преобразования и используя формулу $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, находим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3/3}{x/3}\right)^{(x/3)\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)}\right]^{3}=e^{3}.$$

Пример 3. Найти предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$;

Решение: В данном случае пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю, имеем неопределенность вида [0/0]. Введём замену 3x=t, тогда при

$x\to 0$ переменная $t\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot t/3}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2};$$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти замечательные пределы функций.

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{7/2x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$;

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x^2}$;

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-8x)^{3/4x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{3x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$;

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{3/(5x)}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{\sin 7x}$;

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{5/3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg\,x}$;

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/(15x)}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x}$;

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{2/3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x}$;

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$;

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{4/3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+1}{7x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$;

Вариант 10.

1. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{2x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{2x^2}$;

Вариант 11.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{3/2x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{3}\right)^{2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,9x}{\sin 6x}$;

Вариант 12.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{2x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{4x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,4x}$;

Вариант 13.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{5/3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{5x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{2x}$;

Вариант 14.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{8/x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)^{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$;

Вариант 15.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{2/x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{1+3x}\right)^{4x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{x}$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Запишите первый замечательный предел.
2. Запишите второй замечательный предел.
3. Объясните принцип эквивалентности бесконечно малых функций.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Цель:

- сформировать навыки нахождения производных функций по правилам дифференцирования суммы и разности, произведения и частного;

- развить умение вычисления значения производной при заданном значении аргумента;

- закрепить знания о способах преобразования степенных выражений.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Правила дифференцирования».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

Функция, имеющая конечную производную, называется **дифференцируемой.**

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Если ***y=f(x)*** *и* ***u=φ(x)*** – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции ***y=f (φ(x))*** существует и равна произведению производной функции **y** по промежуточному аргументу ***u*** на производную промежуточного аргумента ***u*** по независимой переменной ***x:***

$$y_x' = y_u' \cdot u_x';$$

Аналогичная формула верна и для сложных функций, которые задаются с помощью цепочки, содержащей три звена и более.

Таблица формул дифференцирования:

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$, $u' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(uv)' = u'v + v'u$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$.
6. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$.
7. $(kx+b)' = k$
8. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
9. $(cu)' = cu'$.
10. $(f(g(x)))' = f'(x) \cdot g'(x)$
11. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

Здесь ***u*** и ***v*** - дифференцируемые функции от ***x***, а С – постоянная величина.

Рассмотрим технику вычисления производных функций на примерах.

Пример 1. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 7, \quad y'(-1);$$

Решение:

1. Применив последовательно правила дифференцирования суммы и степени: $(u+v)' = u' + v'$; $(x^n)' = nx^{n-1}$, имеем:

$$y' = (5x^3 + 2x^2 - 6x + 7)' = (5x^3)' + (2x^2) - (6x)' + 7' = 5(x^3)' + 2(x^2)' - 6(x)' + 7' = 5 \cdot 3x^2 +$$

$$+2 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 6;$$

$$y'(-1) = 15(-1)^2 + 4(-1) - 6 = 15 - 4 - 6 = 5$$

Пример 2. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = 2x^3\sqrt{x^2 - 1}, \quad y'(2);$$

Решение:

Применив правило дифференцирования произведения: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, имеем:

$$y'=\left(2x^3\sqrt{x^2-1}\right)'=\left(2x^3\right)'\sqrt{x^2-1}+2x^3\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=2\cdot 3x^2\sqrt{x^2-1}+2x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1\right)'=$$

$$=6x^2\sqrt{x^2-1}+\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}2x=6x^2\left(x^2-1\right)+2x^4=6x^4-6x^2+2x^4=8x^4-6x^2;$$

$$y'(2)=8\cdot 2^4-6\cdot 2^2=128-24=104.$$

Пример 3. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y=\frac{x^2-2}{x^2+2},\quad y'(1).$$

Решение:

Применив правило дифференцирования частного: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, имеем:

$$y'=\left(\frac{x^2-2}{x^2+2}\right)'=\frac{\left(x^2-2\right)'\left(x^2+2\right)-\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+2\right)-\left(x^2-2\right)2x}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+4x-2x^3+4x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{8x}{\left(x^2+2\right)^2};$$

$$y'(1)=\frac{8\cdot 1}{\left(1^2+2\right)^2}=\frac{8}{3^2}=\frac{8}{9}.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти производные функций при данном значении аргумента.

Вариант 1.

1. $y(x)=5x^4-\frac{2x}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x}+7;\quad y'(2).$

2. $y(x)=(x+1)\sqrt{x-1};\quad y'(5).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x};\quad y'(3)$.

Вариант 2.

1. $y(x)=6x^3-\frac{5x}{\sqrt{x}}+4x^2-12;\quad y'(1).$

2. $y(x)=(x+2)\sqrt{2x-1};\quad y'(4).$

3. $y(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2};\quad y'(1)$.

Вариант 3.

1. $y(x)=2x^2+\sqrt{x}-4x+11+\frac{1}{x};\quad y'(1).$

2. $y(x)=(x-1)\sqrt{x^2-1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x};\quad y'(\sqrt{5})$.

Вариант 4.

1. $y(x)=4x+10-\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}};\quad y'(1).$

2. $y(x)=\left(x^2+6\right)\sqrt{x^2-3};\quad y'(3).$

3. $y(x)=\frac{6x}{\sqrt{x^2+1}};\quad y'(\sqrt{3})$.

Вариант 5.

1. $y(x)=3x-\frac{2x}{x\sqrt{x}}+5+\frac{1}{2x};\quad y'(1).$

2. $y(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{5x^2+6x+1}{x+1};\quad y'(5)$

Вариант 6.

1. $y(x)=3x^3-2x+2+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x};\quad y'(1).$

2. $y(x)=(x-1)\sqrt{3x-2};\quad y'(6).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\quad y'(4)$.

Вариант 7.

1. $y(x)=4x^2-\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}+5;\quad y'(1).$

2. $y(x)=\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2-1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{x^3}{\sqrt{8+x^3}};\quad y'(1)$.

Вариант 8.

1. $y(x)=2x+6x^3-\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}-6;\quad y'(1).$

2. $y(x)=\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1};\quad y'(\sqrt{3}).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{4+x^2}}{x};\quad y'(\sqrt{5})$.

Вариант 9.

1. $y(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3x-2x^2+7;\quad y'(1).$

2. $y(x)=\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2-1};\quad y'(\sqrt{2}).$

3. $y(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}};\quad y'(\sqrt{3})$.

Вариант 10.

1. $y(x)=\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}+8;\quad y'(1).$

2. $y(x)=(2x-1)\sqrt{1-2x};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{x^3+1}}{x};\quad y'(1)$.

Вариант 11.

1. $y(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+1;\quad y'(1).$

2. $y(x)=\left(x^3-1\right)\sqrt{x^2+x+1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};\quad y'(4)$.

Вариант 12.

1. $y(x)=2x^2-6x+7+\frac{5}{\sqrt{x^2}};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=\left(x^2-3\right)\sqrt{x+4};\quad y'(3).$

3. $y(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}};\quad y'(1)$.

Вариант 13.

1. $y(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x^2-9;\quad y'(1).$ 2. $y(x)=\left(3x^2+1\right)\sqrt{2x^2+3};\quad y'(3).$

3. $y(x)=\frac{4+\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}};\quad y'(1)$.

Вариант 14.

1. $y(x)=2{,}5x-6x^3+3\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=\left(x^2+3x\right)\sqrt{x-4};\quad y'(8).$

3. $y(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}};\quad y'(3)$.

Вариант 15.

1. $y(x)=4x^2-3x+\frac{x}{2}+\frac{6}{\sqrt{x^2}};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=\left(x-4\right)\sqrt{x-2};\quad y'(3).$

3. $y(x)=\frac{x^2-5}{\sqrt{x}};\quad y'(1)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Правило дифференцирования суммы и разности двух функций.
2. Сформулируйте правило вычисления производной произведения.
3. Запишите формулу вычисления производной частного двух функций.
4. Как найти производную функции при данном значении аргумента?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цель:

- сформировать навыки нахождения производных тригонометрических функций;
- развить умение вычисления значения производной при заданном значении аргумента;
- закрепить знания о способах дифференцирования сложной функции.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Правила дифференцирования», таблица значений тригонометрических функций.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:
1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Производные тригонометрических функций находят по правилам:

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$ $\qquad (\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$ $\qquad (\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$

$(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u'.$ $\qquad (arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}.$

$(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -\cos ec^2 u \cdot u'.$ $\qquad (arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}.$

Пример 1. Найти производную функции y=sin $^2\varphi$ и вычислить ее значение при $\varphi = \pi / 3$.

Решение. Это сложная функция с промежуточным аргументом sin φ . Дифференцируем её по формулам

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$:

$$f'(\varphi) = 3\sin^2\varphi \cdot (\sin\varphi)' = 3\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi$$

Вычислим значение производной при $\varphi = \pi / 3$;

$$f'(\pi/3) = 3\sin^2(\pi/3)\cdot\cos(\pi/3) = 3(\sqrt{3}/2)^2\cdot(1/2) = 3\cdot(3/4)\cdot(1/2) = 9/8.$$

Пример 2. Найти производную функций при данном значении аргумента:

$$y = \ln\sin^3 5x, \quad y'\left(\frac{\Pi}{15}\right) \quad .$$

Решение:

Используя формулы: $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, найдем производную:

$$y' = \left(\ln\sin^3 5x\right)' = \frac{1}{\sin^3 5x}\left(\sin^3 5x\right)' = \frac{1}{\sin^3 5x}3\sin^2 5x\cdot\left(\sin 5x\right)' = \frac{1}{\sin^3 5x}3\sin^2 5x\cdot\cos 5x\left(5x\right)' =$$

$$= 3\frac{\cos 5x}{\sin 5x}5 = 15ctg5x;$$

$$y'\left(\frac{\Pi}{15}\right) = 15ctg5\cdot\frac{\Pi}{15} = 15ctg\frac{\Pi}{3} = 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}.$$

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Решение. Сначала преобразуем функцию, используя свойства логарифмов:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x).$$

Дифференцируя, получим:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+\sin x))' - \frac{1}{2}(\ln(1-\sin x))' =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{2(1+\sin x)} + \frac{\cos x}{2(1-\sin x)} =$$

$$= \frac{\cos x(1-\sin x) + \cos x(1+\sin x)}{2(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{\cos x(1-\sin x + 1 + \sin x)}{2(1-\sin^2 x)} = \frac{2\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Задание для самостоятельного выполнения:

I. Найти производные функций при данном значении аргумента.

Вариант 1.

1. $y = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right); \quad y'(0).$
2. $y(x) = 7ctg^2 3x; \quad y'(0).$
3. $y = \sin x - \cos^2 x; \quad y'(0).$
4. $y(x) = 3\arcsin 4x; \quad y'(0).$

Вариант 2.

1. $y = 2\sin^2 x\cos x; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$
2. $y(x) = \mathrm{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$
3. $y = \cos^2 x - \sin x; \quad y'(0).$
4. $y(x) = 3tg^2 4x; \quad y'(\pi/12).$

Вариант 3.

1. $y = 7\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$
2. $y(x) = \mathrm{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$
3. $y(x) = \cos^4 3x; \quad y'(\Pi/6).$
4. $y(x) = 6\arccos\sqrt{4x}; \quad y'(\frac{1}{2}).$

Вариант 4.

1. $y = \cos x + \sin^2 x; \quad y'(0).$
2. $y(x) = 4\cos^5 2x; \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right).$
3. $y = \mathrm{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$
4. $y(x) = arctg\sqrt{x}; \quad y'(1/4).$

Вариант 5.

1. $y = \sin^2 x; \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$
2. $y(x) = 2\cos^3 3x; \quad y'(\Pi/6).$
3. $y = 5\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$
4. $y(x) = 6\arcsin 3x; \quad y'(0).$

Вариант 6.

1. $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right); \quad y'(0).$

2. $y(x) = 4ctg^2 3x; \quad y'(\pi/12).$

3. $y(x) = \sin^3(4x); \quad y'(\Pi/8).$

4. $y(x) = 6\arccos\sqrt{4x}; \quad y'(\frac{1}{2}).$

Вариант 7.

1. $y(x) = 7\cos^3 4x; \quad y'(\Pi/8).$

2. $y(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$

3. $y = 3\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right).$

4. $y(x) = 5\operatorname{arcctg} 2x; \quad y'(1).$

Вариант 8.

1. $y(x) = 5\sin x - \cos^2 x; \quad y'(0).$

2. $y(x) = 5\sin^2 2x; \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$

3. $y(x) = 8\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$

4. $y(x) = 8tg^3 3x; \quad y'(\pi/12).$

Вариант 9.

1. $y = \cos^2 x - 9\sin x; \quad y'(0).$

2. $y(x) = 7ctg^2 4x; \quad y'(\Pi/16).$

3. $y = 6\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right).$

4. $y(x) = 7\arcsin 2x; \quad y'(0).$

Вариант 10.

1. $y(x) = 3\sin^2 x\cos x; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$

2. $y(x) = 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right); \quad y'(0).$

3. $y(x) = 7tg^2 3x; \quad y'(\pi/9).$

4. $y(x) = 5\arccos\sqrt{x}; \quad y'(\frac{1}{2}).$

Вариант 11.

1. $y(x) = 4\cos x + \sin^2 x; \quad y'(0).$

2. $y(x) = 4\cos^3 2x; \quad y'(\Pi/8).$

3. $y(x) = 3\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$

4. $y(x) = 3\operatorname{arctg} 3x; \quad y'(1).$

Вариант 12.

1. $y(x) = 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$

2. $y(x) = 2\cos^3 5x; \quad y'(\Pi/15).$

3. $y(x) = 9tg^2 2x; \quad y'(\Pi/8).$

4. $y(x) = 3\operatorname{arcctg} 2x; \quad y'(1).$

Вариант 13.

1. $y(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right); \quad y'(0).$

2. $y(x) = 8\sin^3 2x; \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right).$

3. $y(x) = 9ctg^2 4x; \quad y'(\Pi/16).$

4. $y(x) = 9\arcsin 2x; \quad y'(0).$

Вариант 14.

1. $y(x) = 5\cos^3 3x; \quad y'(\Pi/9).$

2. $\mathrm{y}(x) = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right); \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right).$

3. $y(x) = 5ctg^2 2x; \quad y'(\Pi/8).$

4. $y(x) = 3\arccos\sqrt{2x}; \quad y'(\dfrac{1}{2}).$

Вариант 15.

1. $\mathrm{y}(x) = 5\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right); \quad \mathrm{y}'(0).$

2. $\mathrm{y}(x) = 4\sin^3\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right); \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right).$

3. $y(x) = 6tg^2 5x; \quad y'(\pi/15).$

4. $y(x) = 4\,\mathrm{arcctg}\,5x; \quad y'(1).$

Вопросы для самоконтроля:

1. Чему равны производные синуса и косинуса?
2. Чему равны производные тангенса и котангенса?
3. Запишите формулы производных обратных тригонометрических функций.
4. Как найти производную сложной тригонометрической функции?

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валуцэ И.И. Математика для техникумов. - М.: Наука, 2010. – 432 с.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2008. – 495 с.
3. Яковлев Г.Н. Алегбра и начала анализа. – М.: Наука, 2007. – 663 с.
4. Апанасов П.Т., Орлов М.И. Сборник задач по математике. – М.: Высшая школа, 2007. – 303 с.
5. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. – М.: Высшая школа, 2011. – 480 с.
6. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. –М.: Высшая школа, 2006. – 415 с.
7. Горбатов В.А. Дискретная математика. – М.: Высшая школа, 2006. – 367 с.
8. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – Изд.: Наука, 2007. – 324 с.
9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2007. – 479 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

**Методические указания к практическим занятиям
для студентов 2 курса очной формы обучения
образовательных учреждений
среднего профессионального образования специальностей
131003.51 Бурение нефтяных и газовых скважин,
131018.51 Разработка нефтяных и газовых месторождений**

Часть I

Методические указания к практическим занятиям разработал:
преподаватель Карсакова Елена Николаевна

Подписано к печати ***27.02.2014 г.*** Объем ***3*** п.л.
Формат 60х84/16 Заказ
Тираж ***125 экз.***

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Югорский государственный университет»
НИЖНЕВАРТОВСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Югорский государственный университет»**
Редакционно-издательский отдел
628615 Тюменская обл., Ханты-Мансийский автономный округ,
г. Нижневартовск, ул. Мира, 37.